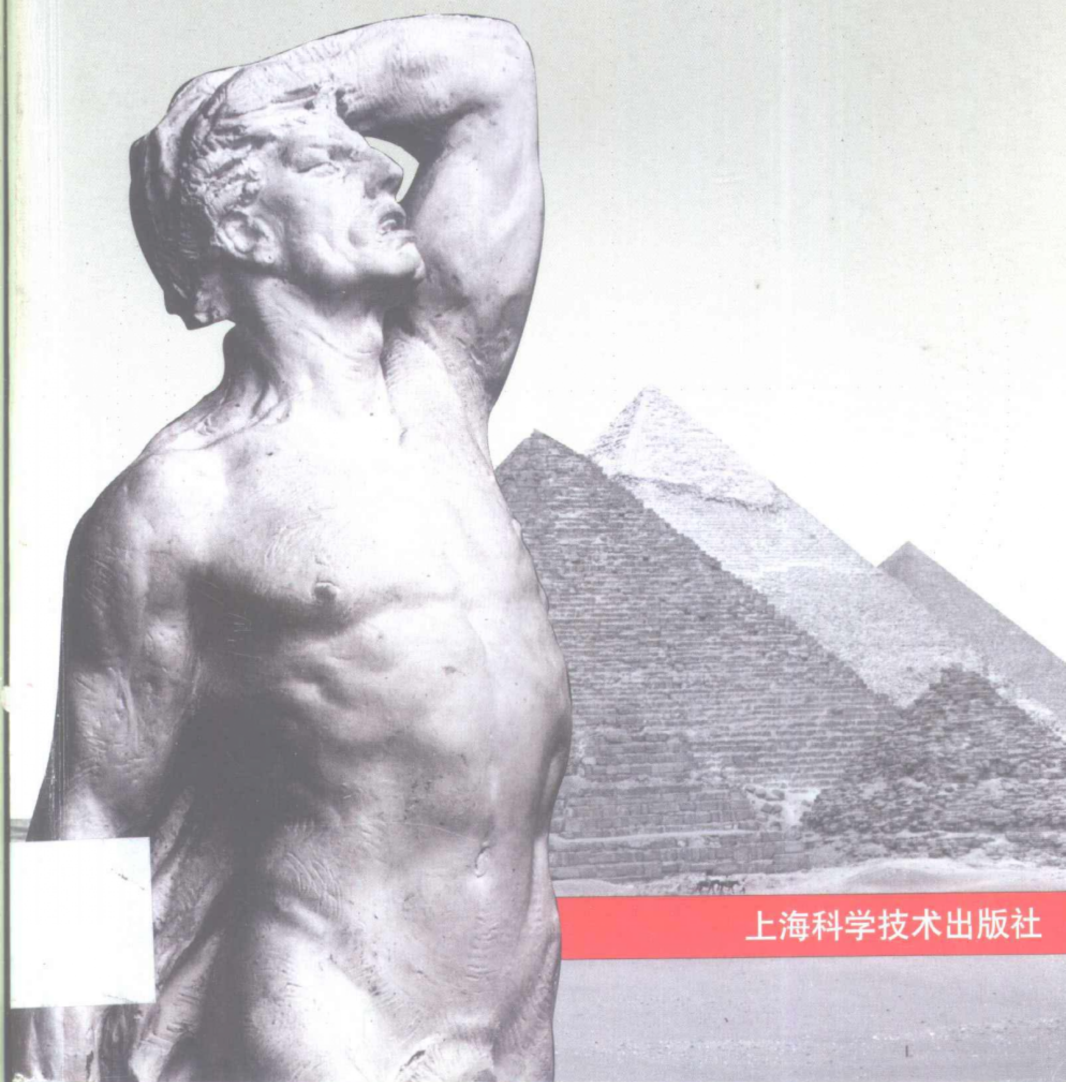
数学分析

方企勤 编著

第三册



上海科学技术出版社

责任编辑 刘 啸
苏德敏
封面设计 彬 彬

SHUXUE
FENXI



ISBN 7-5323-6495-X
9 787532 364954 >
定价：23.70元

数学分析 第三册

O1
F2

数学分析

（第三册）

方企勤编著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本教材讲述的是高等数学的基础课程——数学分析，其核心内容为微积分学．这套教材共三册，本书是其中的第三册．

本书共有九章，分别为多元函数的极限与连续性，多元函数微分学，隐函数存在定理，一般极值与条件极值，含参变量的积分，重积分，曲线积分与曲面积分，各种积分之间的联系、场论，微分形式及其积分．主要讲述了多元微积分等内容，也讲述了场论及微分形式和其积分的初步理论．

本书是由作者在北京大学数学科学学院多年教学所用的讲义基础上修改而成，内容丰富，深入浅出．本书选用了适量有代表性、启发性的例题，还选入了足够数量的习题和思考题，其中既有一般难度的题目，也有较难的题目，供读者酌情选做．

本教材可作为大学本科阶段的数学、概率统计、力学以及计算机等相关专业的教科书，也可作为广大数学工作及爱好者的参考图书．

责任编辑　刘　啸　苏德敏

数 学 分 析

（第三册）

方企勤　编著

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路 450 号　邮政编码 200020）

新华书店上海发行所经销　常熟市兴达印刷有限公司印刷

开本 850×1168　1/32　印张 12.5　字数 323 000

2002 年 9 月第 1 版　2002 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—5 200

ISBN 7-5323-6495-X/O·260

定价：23.70 元

序

本教材的前身是北京大学数学系教学用的讲义,现在出版成书已进入 21 世纪了.面向这一重大挑战,在撰稿的进程中,以下几个方面是作者着重思考并力图落实的.

1. 加强导引性论述,介绍所研究课题的数学史背景、客观原型以及微积分处理问题的思路与方法,这或许有益于树立正确的数学观,增加学习的活泼性.

2. 适当提高起点,扩大知识面.书中在讲解各种理论的应用时,列举了丰富的典型例题,以利于在提高启发式教学水平的同时,让学生有一个扩展的自学园地.

3. 为了培养数学思维的习惯,以及养成"会学"数学的能力,本书在每章节后列有适当数量的思考问题.此外,还以加注,以及用小字和附录的方式介绍微积分理论的进一步伸展和注意事项,这也对引发读者的创新思维有所助益.

4. 考虑到目前对数学家的中文译名的不统一,本书一律用原文书写,(在页末给出中文译名供参考)并尽力介绍他们的国籍和生卒年代.尊重曾为人类的科学进步作出过贡献的学者,是我们后代人文明的表现之一.

对于想用本书作为正式教材的学校和教师来说,在教学实践中必须根据具体培养目标和实际情况对其内容作适当取舍,不能照本宣科.希望广大读者和教师对本书提出批评和建议.

最后,衷心感谢上海科技出版社对本书出版所给予的鼓励和支持.

作者

2002.5

致 读 者

《数学分析》的核心内容是"微积分"——微分学与积分学的统称,它是数学发展史中最伟大的成果,始创于17世纪下半叶,其代表人物是两个伟大的学者:英国的 I. Newton(1643～1727)和德国的 G. W. Leibniz(1646～1716).

Newton 和 Leibniz 对微积分的杰出贡献与这一领域的前期工作不同,他们使微积分成为一门独立的学科,而不再是古希腊几何的附庸和延续,且为许多课题提供了崭新的研究方法.自微积分始,数学发展成为变量数学时期.它从运动、变化的观点、方法来考察各种事物和现象,这正符合客观世界处于不断运动、变化的实际.因此,微积分学的建立给予科学、技术领域以巨大影响,推动了生产力的发展.特别是在天文、力学领域的成就,在当时曾一度冲击宗教的某些旧信条.另一方面,也由于当时的微积分自身理论的不完善而受到责难.但这些都不能阻挡它的继续前进.

19世纪初期,由于科学技术进步的推动,促使许多数学家致力于微积分的改造和奠基工作.终于在19世纪中叶建成现代称之为数学分析的较完善的体系,为微积分的普及创造了更加有利的条件,也使它成为今天各类院校的必修课程.

因此,在三百余年后的今天,学习微积分已不能算是件"时髦"的事情了.如果从培养21世纪的人才而言,或许只能说是一张"入门券"而已.

学习微积分课程的目的有三:一是可应用于实际课题;二是通过它学习数学思维、逻辑判断的能力;最后一点是要为学习

其他课程奠定基础.

本册介绍多元函数微积分内容,与一元函数微积分相比较,其内容有共性也有差异.从共性看,它们都是研究函数的性态,而且在方法上也都主要是从局部入手,从而在体系上仍为同一的格式:极限——连续——微分——积分.另一方面,由于多元函数所依赖的自变量多了,致使许多课题的研究复杂化了,自然也导致所得结果在某些方面更加深刻和丰富.不过,本册也只能点到为止.最后必须指出的是,掌握一元微积分的知识是学好多元微积分的基础.

目 录

多元函数微积分史简介

在自然界和社会中,各种事物和现象的运动、变化往往与多种因素密切相关,这就使得其数量之间的关系呈现多元化,反映在数学里就有了多个自变量的函数.

多元函数的微分运算,早在18世纪初期的科学研究中就已出现,例如Newton(研究多项式方程 $f(x, y)=0$)和Bernoulli兄弟(研究等周问题)都用了偏导数.不过,创建偏导数理论还应归功于Euler. Clairaut和d'Alembert,其主要动力是来自偏微分方程领域的工作.这是因为课题本身所含的物理意义要求考察只有单个自变量变化的情形.

要求建立多元函数重积分的意识,实际上也早已蕴含在Newton的名著《自然哲学的数学原理》关于球与球壳作用于质点上的引力的研究成果中,虽然他当时用的是几何学的语言.而当微积分的理论在18世纪广泛开展起来时,Newton的这一成果立刻被后人用分析数学的形式加以改写并推广.不仅如此,重积分的思想还被用来表示方程

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

的解.

重积分变量替换的课题,是从Lagrange关于旋转椭球体的引力计算中引发的,由于他在三重积分的计算中遇到了困难,便引进了变量替换公式

$$\begin{cases} x = a + r\sin\varphi \cdot \cos\theta, \\ y = b + r\sin\varphi \cdot \sin\theta, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \\ z = c + r\cos\varphi, \end{cases}$$

这实际上相当于用微分量 $r^2\sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$ 代替微分量 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

总的说来,在 18 世纪初人们所处理的重积分都是比较简单的,化重积分为累次积分来计算的课题并未引起足够的重视.即使在 1770 年左右, Euler 曾涉及这一领域,但有关这一积分次序的交换课题,也只是到了 19 世纪在分析基础严密化思潮的推动下,才受到人们的关注.其中原因之一是, 1814 年法国数学家 Cauchy 指出,如果被积函数不连续,那么计算重积分时,积分的先后次序是至关重要的,特别是在函数无界时,下述两个积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y, \quad \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x.$$

不一定相等.

大家知道,对于在定义域上的可微函数来说,其导函数在定义域上的积分值与原函数在定义域边界上的值有着紧密的联系.在一维的情形时,一元函数的 Newton－Leibniz 公式

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

就是这一事实的表现.而反映在多维空间的多元函数的微积分理论中,正是著名的 Green 公式,以及相继的 Gauss 公式和 Stokes 公式.当然,这些极重要的成果的获得是始于物理学课题的深入探讨,其核心是位势理论的展开.例如 Green 的工作就是旨在把位势函数的概念移用到电磁学的研究中.自学成才的 Green 是沿欧洲大陆工作路线前进的第一个英国数学家,在他的影响下,形成了剑桥强大的数学物理学派.其中包括 W. Thomson、G. Stokes、Rayleigh 以及 C. Maxwell.

第十三章 多元函数的极限与连续性

从这章起我们开始讨论多元函数,着重讨论多元数值函数,略微介绍一些多元向量函数的基本知识.对于多元数值函数,主要讨论二元和三元函数.因为从一元函数到二元函数不是简单的推广,会提出一些一元函数所没有的新问题,即使看似与一元函数相同的问题,也会出现一些新的特征,所以两者有质的不同.而从二元函数过渡到多元函数只是自变量个数的增加.从分析的观点来看,两者没有什么质的区别.此外,讨论二元函数不仅书写简明,而且可以用几何图形来表示各种量之间的关系,便于读者理解所述的概念和方法.

§1 平面点集论

1.1 邻域与点列极限

我们用 $\mathbf{R}^2$ 表示欧氏平面,在取定标准基的情况下,平面上的点 P 可以用坐标 (x, y) 来表示.平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$ 与 $P_2(x_2, y_2)$ 之间的距离定义为

$$d(P_1, P_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

称平面上以 P_0 为心,以正数 ε 为半径的开圆是 P_0 点的一个 **ε 邻域**,简称为 P_0 点的**邻域**,记作:

$$U(P_0;\varepsilon)=\{P\in\mathbf{R}^2\,|\,d(P, P_0)<\varepsilon\}.$$

邻域 $U(P_0;\varepsilon)$ 中除去 P_0 点,称为 P_0 点的一个**空心邻域**,记作:

$$U^*(P_0;\varepsilon)=\{P\in\mathbf{R}^2\,|\,0<d(P, P_0)<\varepsilon\}.$$

设$\{P_n(x_n, y_n)\}$为平面上一点列，$P_0(x_0, y_0)$为一定点. 若对任意P_0点的邻域$U(P_0; \varepsilon)$，总存在正整数N，当$n>N$时，有

$$P_n \in U(P_0; \varepsilon),$$

则称点列$\{P_n\}$收敛于点P_0，或称n趋于无穷时，点列$\{P_n\}$有极限点P_0. 记作：

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0,$$

或

$$P_n \to P_0 \quad (n \to \infty).$$

由不等式

$$\left.\begin{matrix} |x_n - x_0| \\ |y_n - y_0| \end{matrix}\right\} \leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0|,$$

可看出点列$\{P_n\}$收敛于点P_0的充分必要条件是：实数序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$分别收敛于x_0和y_0.

容易证明，若点列$\{P_n\}$有极限点，则极限点P_0必唯一，且$\{P_n\}$有界，即存在常数M，使对所有的n，有

$$d(P_n, 0) \leqslant M,$$

或

$$|x_n| \leqslant M, \quad |y_n| \leqslant M.$$

1.2 开集、闭集、区域

这里介绍几个有关的术语和概念. 记号E表示平面点集.

(1) 内点　设$P\in E$，如果存在$\varepsilon>0$，使

$$U(P; \varepsilon) \subset E,$$

则称P是集合E的**内点**. 集合E的所有内点组成的集合，称为E的**内部**，记作E°. 一个集合E的内部可以是空集，记作$\varnothing$. 如

$$E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$E^\circ = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\};$$

$$E = \{(x, y) \mid x, y \text{为有理数}\}, \ E^\circ = \varnothing.$$

(2) 外点　设 $P\overline{\in}E$,如果存在 $\varepsilon>0$,使

$$U(P;\ \varepsilon)\cap E=\varnothing,$$

则称 P 是 E 的**外点**.

(3) 边界点　设 $P\in\mathbf{R}^2$,任给 $\varepsilon>0$,若 $U(P;\ \varepsilon)$中既有 E 的点,又有非 E 的点,则称 P 是 E 的**边界点**. E 的所有边界点的集合称为 E 的**边界**,记作 ∂E. 注意, E 的边界点可以属于 E,也可以不属于 E. 如

$$E=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2<1\},$$

$$\partial E=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2=1\};$$

$$E=\{(x,\ y)\mid x,\ y\text{ 为有理数}\},\ \partial E=\mathbf{R}^2.$$

(4) 开集　若 $E=E^\circ$,即集合 E 的点都是内点,则称 E 为**开集**. 容易证明邻域 $U(P_0;\ \varepsilon)$是一开集. 因空集的内部是空集, $\varnothing^\circ=\varnothing$,所以空集是开集. 关于开集有下列性质: $\mathbf{R}^2$ 与 $\varnothing$ 是开集;有限个开集的交集是开集;任意个开集的并集是开集.

(5) 聚点　设 $P_0\in\mathbf{R}^2$,若任给 $\varepsilon>0$,总有

$$U^*(P_0;\ \varepsilon)\ \cap E\neq\varnothing,$$

即 P_0 点的空心邻域内总有 E 的点,则称 P_0 是 E 的**聚点**. E 的聚点可以属于 E,也可以不属于 E. 在 $\mathbf{R}^2$ 中, E 的内点一定是 E 的聚点.

若 $P_0\in E$,存在 $\varepsilon>0$,使

$$U^*(P_0;\ \varepsilon)\ \cap E=\varnothing,$$

则称 P_0 是 E 的**孤立点**. 不是孤立点的边界点一定是 E 的聚点.

定理 13.1　点 P_0 是集合 E 的聚点的充分必要条件是: 在 E 中存在收敛于 P_0 的互异点列 $\{P_n\}$.

证明　充分性显然. 证必要性. 取 $\varepsilon_1=1$,由 $U^*(P_0;\ 1)\cap E\neq\varnothing$, $\exists\, P_1\in U^*(P_0;\ 1)\cap E$. 令 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},\ d(P_1,\ P_0)\right\}>0$,由 $U^*(P_0;\ \varepsilon_2)\cap E\neq\varnothing$, $\exists\, P_2\in U^*(P_0;\ \varepsilon_2)\cap E$, $\cdots$,令 $\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},\ d(P_{n-1},\ P_0)\right\}>0$,由 $U^*(P_0;\ \varepsilon_n)\cap E\neq\varnothing$,

$\exists P_n \in U^*(P_0;\varepsilon_n)\cap E$. 依此下去,求出互异点列$\{P_n\}\subset E$,且$P_n\to P_0(n\to\infty)$. 证毕.

据此,我们也称 E 的聚点为 E 的**极限点**. 集合 E 添加它的所有聚点的集合称为 E 的**闭包**,记作 $\bar{E}$. 显然 $E\subset\bar{E}$, $\overline{\varnothing}=\varnothing$, $\overline{\mathbf{R}}^2=\mathbf{R}^2$.

(6) 闭集　若 $E=\bar{E}$,即集合 E 含有所有它的聚点,则称 E 为**闭集**. 闭集有下列性质: $\mathbf{R}^2$ 与$\varnothing$是闭集;有限个闭集的并集是闭集;任意个闭集的交集是闭集.

(7) 余集　集合 $\mathbf{R}^2\backslash E$ 称为 E 关于 $\mathbf{R}^2$ 的**余集**,记作 E^c. 可以证明, E 是闭集的充分必要条件是 E^c 为开集. 在 $\mathbf{R}^2$ 中,除 $\mathbf{R}^2$ 与$\varnothing$是既开又闭的集合外,不存在其他既开又闭的集合.

(8) 区域　对于 E 中的任意两点,若总能用属于 E 的连续曲线连接此两点,则称 E 是**道路连通集**. 若 D 既是道路连通集又是开集,则称 D 是**区域**. 如 $D=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},\ y>0\}$, $D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$, $D=\mathbf{R}^2-\mathbf{Z}$ 等集合都是区域.

若 D 是区域,则称 $\bar{D}$ 是**闭区域**.

若集合 E 内任意两点 P_1、P_2 的联线段$\overline{P_1P_2}$也属于 E,则称 E 是**凸集**. 类似可定义凸域.

注　存在区域 D,使$(\bar{D})^\circ\neq D$,如 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}-\{(x,0)\mid 0\leqslant x<1\}$,则$(\bar{D})^\circ=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}\neq D$.

思考练习　解答下列问题:

1. 设 $A\subset B$,试证明 $A^\circ\subset B^\circ$, $\bar{A}\subset\bar{B}$.

2. 试证明 E 是 $\mathbf{R}^2$ 中闭集的充分必要条件是 $E^c=\mathbf{R}^2\backslash E$ 是开集.

3. 设 G 为开集,若 $E\cap G=\varnothing$,试证明 $\bar{E}\cap G=\varnothing$.

4. 试证明: $\partial E=\bar{E}\backslash E^\circ$.

5. 若把 $\mathbf{R}^2$ 中子集 X 看成基本空间, $P_0\in X$,定义 P_0 点邻域为 $U(P_0;\varepsilon)=\{P\in X\mid d(P,P_0)<\varepsilon\}$. 问集合 $E\subset X$ 的孤立点是否可以是 E 的内点. 除 X 与$\varnothing$是既开又闭的集合外,是否有其他既开又闭的集合.

1.3 完备性定理

定理 13.2(收敛原理) 点列$\{P_n\}$有极限点的充分必要条件是：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n, m>N$ 时，有

$$d(P_n, P_m)<\varepsilon.$$

(我们称满足上述条件的序列为 Cauchy 列)

证明 必要性显然. 证充分性. 设点 P_n 的坐标为(x_n, y_n) $(n=1, 2, \cdots)$，由条件可得

$$\left.\begin{matrix}|x_n-x_m|\\ |y_n-y_m|\end{matrix}\right\}\leqslant d(P_n, P_m)<\varepsilon \quad (n, m>N),$$

根据数列的收敛原理，知数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$有极限 x_0 和 y_0. 记点(x_0, y_0)为 P_0，即得点列$\{P_n\}$有极限点 P_0. 证毕.

相应于区间套定理，我们有闭集套定理. 记号 $\mathrm{diam}E$ 表示集合 E 的直径，其定义为：

$$\mathrm{diam}E=\sup_{P_1, P_2\in E} d(P_1, P_2).$$

定理 13.3(闭集套定理) 设$\{F_n\}$是非空闭集列，满足：

(1) $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$;

(2) $\mathrm{diam}F_n\to 0\ (n\to\infty)$.

则存在唯一一点 P_0 属于所有闭集 F_n：

$$\{P_0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n.$$

证明 在每个 F_n 中任取一点 P_n，得一点列$\{P_n\}$. $\forall \varepsilon>0$，由 $\mathrm{diam}F_n\to 0\ (n\to\infty)$，$\exists N$，使

$$\mathrm{diam}F_N<\varepsilon,$$

所以当 $n, m>N$ 时，由于 $P_n\in F_n\subset F_N$，$P_m\in F_m\subset F_N$，可得

$$d(P_n, P_m)\leqslant \mathrm{diam}F_N<\varepsilon.$$

根据收敛原理，存在点 P_0，使

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0.$$

固定 m，当 $n\geqslant m$ 时，$P_n\in F_m$ 和 F_m 为闭集，可得 $P_0\in F_m$. 由 m

的任意性,即得 $P_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

假设还有一点 $P^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$,则

$$d(P_0,\ P^*)\leqslant \mathrm{diam}F_n,$$

令 $n\to\infty$,得 $d(P_0,\ P^*)=0$,即有 $P_0=P^*$. 证毕.

定义 13.1 若在定义有距离的空间 X 中,任一 Cauchy 列都有极限点,则称空间 X 是**完备的**.

由定理 13.2 看出,$\mathbf{R}^2$ 是完备的. 事实上 $\mathbf{R}^2$ 中闭集 X 视作空间也是完备的,而 $X=\mathbf{R}^2-\{(0,\ 0)\}$ 是不完备的.

思考练习 解答下列问题:

1. 闭集套定理中略去条件(2),是否有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing.$$

2. 证明: $\mathrm{diam}\bar{E}=\mathrm{diam}E$.

1.4 紧性定理

定理 13.4(Bolzano) 有界点列必能选出收敛的子列.

证明 设点列 $\{P_n(x_n,\ y_n)\}$ 有界,即存在常数 M,使

$$|x_n|\leqslant M,\quad |y_n|\leqslant M\quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

由一元函数的 Bolzano 定理,从序列 $\{x_n\}$ 中可选出子列 $\{x_{n_k}\}$,使

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0.$$

对应子列 $\{y_{n_k}\}$,又可选出子列 $\{y_{n_{k_j}}\}$,使

$$\lim_{j\to\infty}y_{n_{k_j}}=y_0.$$

所以子列 $\{(x_{n_{k_j}},\ y_{n_{k_j}})\}$ 即为所求子列. 证毕.

开集族 $\mathscr{G}=\{G_\alpha\}$ 称为集合 E 的**开覆盖**,如果 E 中每一点至少属于 $\mathscr{G}$ 中某一个开集,或 $E\subset\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha$.

定理 13.5(Heine-Borel) 设 E 是非空有界闭集, $\mathscr{G}=\{G_\alpha\}$ 是 E 的一个开覆盖,则从 $\mathscr{G}$ 中必能选出有限个开集 G_1,

$G_2, \cdots, G_n$,使

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j.$$

证明 用反证法.假设 $\mathscr{G}$ 中不存在 E 的有限子覆盖.因 E 有界,所以可作闭正方形 $Q_1: |x| \leqslant M, |y| \leqslant M$ 包含 E,令 $F_1 = Q_1 \cap E$.将 Q_1 分成四个相等的小闭正方形,其中至少有一个小闭正方形 Q_2 满足条件:(1) $F_2 = Q_2 \cap E$ 是非空有界闭集;(2) $\mathscr{G}$ 中不存在 F_2 的有限子覆盖.

重复这一作法,得一闭正方形序列 $\{Q_n\}$,相应有闭集列 $\{F_n = Q_n \cap E\}$,满足:(1) $F_{n+1} \subset F_n (n=1, 2, \cdots)$;(2) $\operatorname{diam} F_n \to 0\ (n \to \infty)$;(3) $\mathscr{G}$ 中不存在 F_n 的有限子覆盖.

由闭集套定理,存在一点 $P_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,特别 $P_0 \in F_1 = E$.因 $\mathscr{G}$ 是 E 的开覆盖,所以有开集 $G \in \mathscr{G}$,使 $P_0 \in G$,也就有 P_0 点邻域 $U(P_0; \varepsilon) \subset G$.由于 $\operatorname{diam} F_n \to 0\ (n \to \infty)$ 和 $P_0 \in F_n$,故当 n 充分大时,有 $F_n \subset U(P_0; \varepsilon) \subset G$,它与 $\mathscr{G}$ 中不存在 F_n 的有限子覆盖矛盾.这矛盾说明反证法假设不成立,即 $\mathscr{G}$ 中存在 E 的有限子覆盖.证毕.

注 若 E 是开集,定理可以不成立.如 $E = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$,取 $\mathscr{G} = \{G_n\}$,其中 $G_n = \left\{(x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 - \dfrac{1}{n+1}\right\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$,显然 $\mathscr{G}$ 是 E 的一个开覆盖,但 $\mathscr{G}$ 中选不出有限个开集覆盖 E.

定义 13.2 如果集合 K 的每个开覆盖,总含有一个有限子覆盖,则称 K 是**紧集**.

由定理 13.5 可看出,$\mathbf{R}^2$ 中任一有界闭集是紧集.

思考练习 解答下列问题:

1. $E \subset \mathbf{R}^2$ 是无界集,说明 $\mathscr{G} = \{G_n\}$(其中 $G_n = \{P \in \mathbf{R}^2 \mid d(P, O) < n\}$)是 E 的一个开覆盖,问是否有有限子覆盖?

2. 设 $E \subset \mathbf{R}^2$ 有不属于 E 的聚点 P_0,说明 $\mathscr{G} = \{G_n\}$ (其中 G_n

$=\left\{P\in\mathbf{R}^2\,\middle|\,d(P,P_0)>\dfrac{1}{n}\right\}\Big)$是$E$的一个开覆盖,问是否有有限子覆盖?

3. 证明$K\subset\mathbf{R}^2$是紧集的充分必要条件是:K为有界闭集.

4. $E\subset\mathbf{R}^2$仅有有限个聚点,且属于E,问E是否是紧集?

§2 多元函数的极限

2.1 映射与多元函数的概念

设X、Y为两集合,f是一个对应规则,若对于集合X中每一个元素$x\in X$,根据对应规则f,在集合Y中有唯一的元素y与之对应,则称f是X到Y的一个**映射**,记作

$$f:X\to Y,\ x\mapsto y=f(x).$$

我们称X为映射的**定义域**,Y为**取值域**,象集$f(X)=\{y\mid y=f(x),\ x\in X\}$为**值域**.

若$A\subset X$,称集合$f(A)=\{y\in Y\mid \exists x\in A,\ y=f(x)\}$为$A$在映射$f$下的**象**.若$B\subset Y$,称集合$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$为$B$在映射$f$下的**逆象**.

若$x_1\neq x_2$时,有$f(x_1)\neq f(x_2)$,或$f(x_1)=f(x_2)$时,可推出$x_1=x_2$,则称映射是**单射**或**单叶**.若$f(X)=Y$,称映射是**满射**.既是单射又是满射的映射称为**双射**.

若$X\subset\mathbf{R}^n$,$Y\subset\mathbf{R}^m$,则称$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是**多元向量函数**,记号$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$理解成$n$维和$m$维欧氏空间中的点或向量.当$m=1$时,称映射$y=f(\boldsymbol{x})$是**$n$元数值函数**,简称$n$元函数.二元函数常记作$z=f(P)$或$z=f(x,y)$,记号$x$,$y$理解成平面上点的坐标.

严格来说给定一函数,必须指明其定义域、取值域和对应规则.但有时只给定对应规则或公式$z=f(x,y)$,这时我们约定*函数的定义域D即为使公式有意义的(x,y)取值集合*,取值域为$\mathbf{R}$.给定函数$z=f(x,y)$,变量x、y称为**自变量**,变量z称为**因变量**.函数可以用空间直角坐标系$Oxyz$中的曲面来表示.先

在 Oxy 坐标平面上画出定义域 D，D 内任取一点 $P(x, y)$，求出对应的 $z=f(x, y)$ 值，然后在空间画出点 $M(x, y, z)$. 让点 P 在 D 内变动并扫遍整个定义域 D，相应地点 M 在空间中画出一张曲面 S(严格地说是一空间点集)(图 13-1)，所以给定二元函数也常说成给定一张空间曲面.

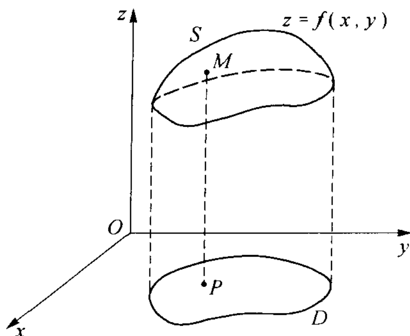


图 13-1

二元函数除用曲面表示外，也可用平面上一系列等位线来表示. 称平面点集

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = C\}$$

为曲面 $z=f(x, y)$的**等位线**或**等高线**，它是垂直于 z 轴的平面 $z=C$ 与曲面 $z=f(x, y)$的交线在 Oxy 平面上的投影. 通常取一系列等距的 C 值，在平面上画出这些等高线，根据等高线的疏密分布，可以想像出曲面的大致形状.

三元函数 $u=f(x, y, z)$是四维空间中的点集，用等位面的方法可以给出它在三维空间中的几何表示.

思考练习 给定映射 $f: X\to Y$，设 $A_\alpha\subset X$，$B_\alpha\subset Y$，试证明：

1. $f(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)=\bigcup\limits_\alpha f(A_\alpha)$，$f(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap\limits_\alpha f(A_\alpha)$，当 f 是单射时，包含号可改为等号.

2. $f^{-1}(\bigcup\limits_\alpha B_\alpha)=\bigcup\limits_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$，$f^{-1}(\bigcap\limits_\alpha B_\alpha)=\bigcap\limits_\alpha f^{-1}(B_\alpha)$.

3. $f(f^{-1}(B))\subset B$，当 f 是满射时，式中包含号可改为等号.

4. $A\subset f^{-1}(f(A))$，当 f 是单射时，式中包含号可改为等号.

2.2 全面极限

定义 13.3 设 $f(P)$在集合 E 上定义，P_0 是 E 的聚点. 若任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $P\in U^*(P_0;\ \delta)\cap E$ 时，有 $f(P)\in U(A;\ \varepsilon)$，则称 P 趋于 P_0 时，函数 $f(P)$有极限 A，记作：

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=A\ (P\in E).$$

上面用邻域术语刻画动点 P 与定点 P_0 充分接近时，动点的函数值 $f(P)$与 A 充分接近. 定义也可用不等式来表述：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<d(P,\ P_0)<\delta$ 时，有 $|f(P)-A|<\varepsilon$.

为了与累次极限比较，函数极限也可如下定义.

定义 13.4 设 $f(x,\ y)$在集合 E 上定义，$(x_0,\ y_0)$为 E 的聚点. 若任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $(x_0,\ y_0)\neq(x,\ y)\in E$ 时，就有 $|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$，则称 $(x,\ y)$趋于 $(x_0,\ y_0)$时，函数 $f(x,\ y)$有极限 A，记作：

$$\lim_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)}f(x,\ y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)=A\quad((x,\ y)\in E).$$

上述两个定义是等价的. 因为对任给 $\varepsilon>0$，若按定义 13.3 存在圆形邻域，则一定存在符合定义 13.4 的方形邻域；反之，若按定义 13.4 存在方形邻域，则一定存在符合定义 13.3 的圆形邻域.

类似于一元函数极限的讨论，对二元函数极限同样有极限值唯一性，函数局部有界性，极限的四则运算(除法运算时，要求

分母的极限不为零),极限不等式,极限的收敛原理,上下极限等.

同样可引入无穷小量和高阶无穷小量概念.两无穷小量之和为无穷小量,有界变量与无穷小量之积为无穷小量.例如利用有界变量与无穷小量之积为无穷小量可得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot y=0,$$

和

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

由极限定义可知,函数 $f(x, y)$ 的极限为 A,允许动点 (x, y) 沿任何方式趋于定点 (x_0, y_0),所以也称 A 为函数的**全面极限**.如果动点沿两条不同的曲线趋于定点时,函数 $f(x, y)$ 的极限值不等,则函数的全面极限不存在.

例 1 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

解 考察点 (x, y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

可见当 k 取不同值(如 $k=1, 2$)时,上式极限值不同,所以所求函数的极限不存在.

例 2 讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解 让点 (x, y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=0.$$

让点 (x, y) 沿抛物线 $y=x^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时,得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2},$$

所以函数的极限不存在.

2.3 累次极限

前面讨论的极限,要求变量 x 和 y 同时趋于 x_0 和 y_0. 还可以讨论变量 x 和 y 先后相继地趋于 x_0 和 y_0 的情况.

定义 13.5 设 $f(x, y)$在 $0<|x-x_0|<a,\ 0<|y-y_0|<a$ 上定义,若对任意固定的值 $y(0<|y-y_0|<a)$,当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x, y)$的极限存在,记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)=\varphi(y)$;又当 $y\to y_0$ 时,函数 $\varphi(y)$的极限存在,记 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$. 则称 A 是函数 $f(x, y)$先对 x 后对 y 的**累次极限**,记作:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = A.$$

同样可定义先对 y 后对 x 的累次极限:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x, y) = A.$$

全面极限与累次极限究竟有什么关系呢? 如函数 $f(x, y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$,当 $(x, y)\to(0, 0)$时,已知全面极限为零,但极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)$与 $\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)$不存在,所以两个累次极限不存在. 又如 2.2 节例 1 中函数的全面极限不存在,但两个累次极限存在:

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0,\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

这说明全面极限与两个累次极限存在与否及是否相等,不是无前提的. 要两者存在并且相等,必须再添加一定条件.

定理 13.6 设 $f(x, y)$在 $0<|x-x_0|<a,\ 0<|y-y_0|<a$ 上定义,且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$ (有限或无限);对任意固定的 $y(0<|y-y_0|<a)$,有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)=\varphi(y)$,则

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \lim_{y\to y_0}\varphi(y) = A.$$

证明 只证 A 为有限情形. $\forall\varepsilon>0$,由全面极限存在,$\exists\delta$

>0 $(\delta<a)$,当 $0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon.$$

固定 y: $0<|y-y_0|<\delta$,在上式中令 $x\to x_0$,得

$$|\varphi(y)-A|\leqslant\varepsilon.$$

根据一元函数极限的定义,上式即为

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=A.\quad \text{证毕.}$$

若在定理 13.6 中 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,\ y)=\varphi(y)$ 存在改为 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,\ y)=\psi(x)$ 存在,则有

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,\ y)=A.$$

定理 13.6 说明若全面极限存在,两个内层极限存在,则两个累次极限一定存在且相等,或两个累次极限可交换求极限顺序:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,\ y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,\ y).$$

反之,若两个累次极限存在但不等,则全面极限一定不存在.于是我们又得到一个全面极限不存在判别法.如

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=-1,\quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=1,$$

所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数的定义域并作图示意:

(1) $z=\ln(y-x^2)$.

(2) $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-r^2}{R^2-x^2-y^2}}$ $(R>r>0)$.

2. 试问下列极限是否存在?若存在则求出极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^3+y^3)\pi}{x^2+y^2}$. (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to 0+}}x^y$.

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ $(x^2+y\neq 0)$. (4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^x$.

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$. (6) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\frac{2}{xy}}$.

3. 对 $A=+\infty$ 情形证明定理 13.6.

4. 设 $f(x, y)$ 在 $0<x<1,\ 0<y<1$ 上定义,在 $(0, 0)$ 点沿各方向的方向极限均等于 A,两个累次极限均为 B,是否必有 $A=B$. 考察例子

$$f(x, y)=\mathrm{e}^{-\frac{\sin(x^3+y^3)}{xy}}.$$

5. 设 $f(x, y)$ 在 $0<|x-a|<\delta_1,\ 0<|y-b|<\delta_1$ 上定义,并满足:

(1) $\lim\limits_{y\to b}f(x, y)=\varphi(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to a}f(x, y)=\psi(y)$ 一致存在,即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$(δ 只与 ε 有关,与 y 无关),当 $0<|x-a|<\delta<\delta_1$ 时,对 $\forall y$: $0<|y-b|<\delta_1$,恒有 $|f(x, y)-\psi(y)|<\varepsilon$.

试证明:

(1) 累次极限 $\lim\limits_{x\to a}\lim\limits_{y\to b}f(x, y)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$ 存在.

(2) 累次极限 $\lim\limits_{y\to b}\lim\limits_{x\to a}f(x, y)=\lim\limits_{y\to b}\psi(y)=A$ 存在.

(3) 全面极限 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\y\to b}}f(x, y)=A$.

§3 多元函数的连续性

3.1 数值函数的连续性

定义 13.6 设 $f(x, y)$ 在集合 E 上定义,$(x_0, y_0)\in E$. 若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 且 $(x, y)\in E$ 时,恒有 $|f(x, y)-f(x_0, y_0)|<\varepsilon$. 则称函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点**连续**.

由定义可知,若 (x_0, y_0) 是 E 的孤立点,则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续. 若 (x_0, y_0) 是 E 的聚点, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

若函数 $f(x,y)$ 在 E 的每一点连续,则称 $f(x,y)$ 在 E 上连续.所有 E 上的连续函数集合记作 $C(E)$.可以证明连续性对四则运算(除法时要求分母不为零)是封闭的.所有初等函数表示的多元函数在其定义域上是连续的.

定理 13.7 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 为有界闭集, $f(x,y)\in E$,则

(1) $f(x,y)$ 在 E 上有界,则存在常数 M,当 $(x,y)\in E$ 时,有 $|f(x,y)|\leqslant M$;

(2) $f(x,y)$ 在 E 上取到它的最大、最小值,即存在两点 $(x_1,y_1)\in E$, $(x_2,y_2)\in E$,对任意 $(x,y)\in E$,有

$$f(x_1,y_1)\leqslant f(x,y)\leqslant f(x_2,y_2);$$

(3) $f(x,y)$ 在 E 上一致连续,即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 E 上任意两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 满足 $|x_1-x_2|<\delta$, $|y_1-y_2|<\delta$ 时,恒有 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|<\varepsilon$.

定理的证明可模仿一元函数相应定理的证明,故此略去.

定理 13.8 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是道路连通集, $f(x,y)\in C(D)$,又对 D 上两点 (x_1,y_1), (x_2,y_2) 满足 $f(x_1,y_1)<0$, $f(x_2,y_2)>0$,则存在一点 $(x^*,y^*)\in D$,使 $f(x^*,y^*)=0$.

证明 因 D 道路连通,故可作一位于 D 内的连续曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 连接 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 两点,即

$$\begin{cases}x_1=x(a),\\ y_1=y(a),\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=x(b),\\ y_2=y(b).\end{cases}$$

考虑一元函数 $g(t)=f[x(t),y(t)]$,容易证明 $g(t)$ 在 $[a,b]$ 区间上连续,且 $g(a)=f(x_1,y_1)<0$, $g(b)=f(x_2,y_2)>0$.应用一元连续函数的中间值定理,存在 $\xi\in[a,b]$,使 $g(\xi)=0$.记 $x^*=x(\xi)$, $y^*=y(\xi)$,则 $(x^*,y^*)\in D$,且 $f(x^*,y^*)=g(\xi)=0$.证毕.

思考练习 解答下列问题:

1. 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 分别对 x 以

及 y 是连续的,但不是二元连续的.

2. 证明函数 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 在过原点的每一条直线 $x=t\cos\theta,\ y=t\sin\theta\ (-\infty<t<\infty)$ 上一元连续,但不是二元连续的.

3. 试问下列函数是否在全平面上连续?

(1) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin y}{y}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$

(2) $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ y, & x=0.\end{cases}$

4. 设 $f(x, y)$在半平面 $x>0$ 上连续,且对任意固定 y_0,存在 $\lim\limits_{x\to 0+} f(x, y_0)=\varphi(y_0)$. 若补充定义 $f(0, y)=\varphi(y)$,试问 $f(x, y)$是否在 $x\geqslant 0$ 上连续?

5. 设 $f(x, y)$在半平面 $x>0$ 上连续,且对任意的固定 y_0,存在极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0+\\ y\to y_0}} f(x, y)=\varphi(y_0)$. 若补充定义 $f(0, y)=\varphi(y)$,试证明 $f(x, y)$在 $x\geqslant 0$ 上连续.

6. 设 $f(x, y)$在区域 D 上定义. 若固定 y 则对变量 x 连续,且对 y 满足 Lipshitz 条件:(L 为常数)

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|.$$

试证明 $f(x, y)$在 D 上连续.

7. 设 $f(p)$在闭区域 $\overline{D}$ 上连续, $p_i\in\overline{D}\ (i=1, 2)$, $f(p_1)<0$ 且 $f(p_2)>0$,试证明存在 $p^*\in D$,使得 $f(p^*)=0$.

8. 区域 D 上有界连续函数是否一致连续. 考察例子,设 D 是圆环 $1<x^2+y^2<4$ 除去线段(1, 2)的区域, $\theta(x, y)$为(x, y)点的极角函数.

9. 设 $E\subset\mathbf{R}^2$ 上每个连续函数都一致连续,问 E 是否为有

界集. 考察集合 $E=\{(x, y)|x, y\in\mathbf{Z}\}$.

10. $E\subset\mathbf{R}^2$,设 E 上每个连续函数都有界,证明 E 是有界闭集.

11. 设 $f(x, y)$在 $D=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant A, b\leqslant y\leqslant B\}$上连续, $\{g_n(x)\}$在$[a, A]$上一致收敛,且 $b\leqslant g_n(x)\leqslant B$ $(n=1, 2, \cdots)$,试证明 $F_n(x)=f[x, g_n(x)]$在$[a, A]$上一致收敛.

12. 设 $f(x, y)$定义在 $\mathbf{R}^2$ 上. 若它对 x 连续,对 y 连续且单调,试证明 $f(x, y)$二元连续.

3.2 向量函数的连续性

讨论复合函数连续性时,引入向量函数概念可以看得更清楚.

映射 $\boldsymbol{f}: D\subset\mathbf{R}^n\to\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 把集合 D 中的点 $\boldsymbol{x}$ 映为集合 Ω 中的点 $\boldsymbol{y}$,由于点与向量一一对应,我们可以把 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 理解成向量,称映射 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为多元向量函数. 若用上脚标来表示向量的分量

$$\boldsymbol{x}=(x^1, x^2, \cdots, x^n),\quad \boldsymbol{y}=(y^1, y^2, \cdots, y^m),$$

则给定向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,等价于给定 m 个 n 元分量函数:

$$\begin{cases} y^1=f_1(x^1, x^2, \cdots, x^n)=f_1(\boldsymbol{x}), \\ y^2=f_2(x^1, x^2, \cdots, x^n)=f_2(\boldsymbol{x}), \\ \cdots\cdots \\ y^m=f_m(x^1, x^2, \cdots, x^n)=f_m(\boldsymbol{x}). \end{cases}$$

向量可作加、减、数乘运算外,还可引入向量的长度或模,记作

$$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x^j)^2}.$$

两向量之差的模$|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|$,表示向量 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 之间的距离. 利用模可定义向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 点的连续性. 即$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$,且 $\boldsymbol{x}\in D$ 时,恒有$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon$. 形式上与一元函数连续的定义完全一样,只是把数的绝对值理解成向量的模即成. 容易看出,向量函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续,等价于对任

一点列$\{\boldsymbol{x}_n\}\subset D$，$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}_0$，恒有$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

若$\boldsymbol{f}: D\to\Omega$在$D$的每一点连续，则称向量函数$\boldsymbol{f}$在$D$上连续. 记所有$D$到$\Omega$的连续向量函数全体为$C(D,\ \Omega)$.

由不等式

$$\begin{aligned}|f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}_0)| &\leqslant |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{m}|f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\boldsymbol{x}_0)|\end{aligned}$$

$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$可以看出，向量函数$\boldsymbol{f}: D\to\Omega$在$D$上连续的充分必要条件是：$\boldsymbol{f}$的每个分量函数$f_j: D\to\mathbf{R}^1$在$D$上连续$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$.

定理 13.9 设$\boldsymbol{f}: D\subset\mathbf{R}^n\to\Omega\subset\mathbf{R}^m$在$\boldsymbol{x}_0\in D$点连续，$\boldsymbol{g}: \Omega\to\Delta\subset\mathbf{R}^p$在$\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\in\Omega$点连续，则复合函数$\boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$或记作$(\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}): D\to\Delta$在$\boldsymbol{x}_0$点连续.

证明 $\forall\varepsilon>0$，由$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$在$\boldsymbol{y}_0$点连续，$\exists\eta>0$，当$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|<\eta$且$\boldsymbol{y}\in\Omega$时，有$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)|<\varepsilon$.

对于$\eta>0$，由$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$点连续，$\exists\delta>0$，当$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$且$\boldsymbol{x}\in D$时，有$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0|=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\eta$.

所以当$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$且$\boldsymbol{x}\in D$时，有$|\boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]-\boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)]|<\varepsilon$. 证毕.

定理 13.10 设$E\subset\mathbf{R}^n$为有界闭集，$\boldsymbol{f}\in C(E,\ \mathbf{R}^m)$. 则

(1) $\boldsymbol{f}(E)$是有界闭集；

(2) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$E$上一致连续；

(3) 若E是道路连通集，则$\boldsymbol{f}(E)$也是道路连通集.

证明 证(1). 先证$\boldsymbol{f}(E)$有界. 假设$\boldsymbol{f}(E)$无界，则对每个正整数n，总存在$\boldsymbol{x}_n\in E$，使$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)|>n$，这样得一$E$内点列$\{\boldsymbol{x}_n\}$. 因$E$为有界闭集，由 Bolzano 定理，存在子列$\{\boldsymbol{x}_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_{n_k}=\boldsymbol{x}_0\in E$，于是有

$$\lim_{k\to\infty}|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_k})|=+\infty.$$

这与$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x}_0$点连续相矛盾，故$\boldsymbol{f}(E)$有界.

其次证$\boldsymbol{f}(E)$为闭集. 设$\boldsymbol{y}_0$为$\boldsymbol{f}(E)$的极限点，由定理 13.1

知存在序列$\{y_n\}\subset f(E)$，$y_n\to y_0(n\to\infty)$. 因$\{y_n\}$含在值域内，所以存在序列$\{x_n\}\subset E$，使 $y_n=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$. 应用 Bolzano 定理，$\{x_n\}$可选出子列$\{x_{n_k}\}$，使$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=x_0\in E$. 再由函数连续性得

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=y_0,$$

这表明 $y_0\in f(E)$，故 $f(E)$是闭集.

证(2). $\forall\varepsilon>0$，由 f 在每点 $x\in E$ 连续，$\exists\delta(x)>0$，当$|x'-x|<\delta(x)$时，有$|f(x')-f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

考虑 E 的开覆盖 $\mathscr{G}=\left\{U\left(x;\dfrac{\delta(x)}{2}\right)\bigg|x\in E\right\}$，由于 E 是有界闭集，存在有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{n}U\left(x_i;\frac{\delta(x_i)}{2}\right).$$

令 $\delta=\dfrac{1}{2}\min\{\delta(x_1),\cdots,\delta(x_n)\}>0$，则当$|x'-x''|<\delta$ 时，在 E 的有限子覆盖中存在 $x_m(1\leqslant m\leqslant n)$，使

$$x'\in U\left(x_m;\frac{\delta(x_m)}{2}\right)\quad\text{或}\quad|x'-x_m|<\frac{\delta(x_m)}{2}.$$

由此得$|x''-x_m|\leqslant|x''-x'|+|x'-x_m|<\delta(x_m)$，既然 x'，x''在同一邻域$U(x_m;\delta(x_m))$内，所以有

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&\leqslant|f(x')-f(x_m)|+|f(x'')-f(x_m)|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 f 在 E 上一致连续.

证(3). $\forall y_1,y_2\in f(E)$，$\exists x_1,x_2\in E$，使 $y_1=f(x_1)$，$y_2=f(x_2)$. 由于 E 是道路连通集，所以存在位于 E 内的连续曲线 $x=x(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$连接 $x_1=x(a)$和 $x_2=x(b)$. 故存在位于 $f(E)$的连续曲线 $y=f[x(t)]$ 连接 $y_1=f[x(a)]$和 $y_2=f[x(b)]$. 证毕.

思考练习 试证明下列命题：

1. 用反证法证明定理 13.10 中(2).
2. 证明 f 在 $x_0\in D$ 点连续，充要条件是：$\forall\{x_n\}\subset D$，x_n

$\to \boldsymbol{x}_0(n\to\infty)$,都有$\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$.

3.3 同胚变换

多元函数的逆函数问题要比一元函数困难和复杂.

定义 13.7 若映射 $\boldsymbol{f}: X\subset\mathbf{R}^n\to Y\subset\mathbf{R}^n$ 是双射,且 $\boldsymbol{f}$ 和由 $(\boldsymbol{f}^{-1}\circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in X)$所确定的逆映射 $\boldsymbol{f}^{-1}: Y\to X$ 都是连续的,则称 $\boldsymbol{f}$ 为**同胚变换**或**拓扑变换**.

一元函数时,若 I 为区间(开的、闭的、半开半闭的), $f(x)$ 在 I 上连续、单射,则 $f(I)$也是同一类型区间,且逆函数$f^{-1}(y)$ 在 $f(I)$上连续. 而对于多元函数情形,由变换连续和单射,一般推不出逆变换在值域上连续.

如 $D=\{(r,\theta)\mid 1<r<2,\ 0\leqslant\theta<2\pi\}$, $\Omega=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$,变换 $\boldsymbol{f}: D\to\Omega$ 由 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 给出. 显然 $\boldsymbol{f}$ 在 D 上连续、单射,逆变换 $\boldsymbol{f}^{-1}: \Omega\to D$ 由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=$ 点(x, y)的极角给出,逆变换 $\boldsymbol{f}^{-1}$在 Ω 与正实轴相交的点处不连续(图 13-2). 出现这一憾事,因 D 不是区域. 若 D 是区域,我们不加证明给出下面定理.

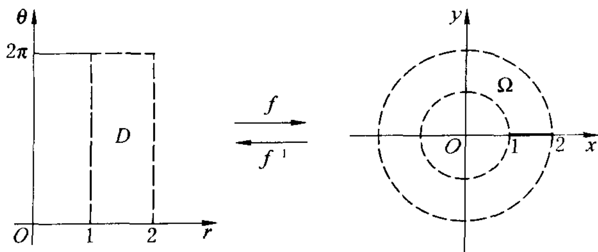


图 13-2

定理 13.11(Brouwer① 定理) 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是区域,变换 $\boldsymbol{f}: D\to\mathbf{R}^2$ 在 D 上连续、单射,则 $\boldsymbol{f}(D)$为一区域,且 $\boldsymbol{f}: D\to\boldsymbol{f}(D)$

① 布劳威尔(荷兰, 1881~1967).

为一同胚变换.

已知一元函数 $f(x)$在开区间 I 上连续、单射,则 $f(x)$一定在 I 上或严格递增或严格递减.如严格递增,我们称 f 是区间 I 与 $f(I)$间的保定向变换;如严格递减,称 f 是 I 与 $f(I)$间的反定向变换.设 D, Ω 为平面区域, f: $D\to\Omega$ 是同胚变换,我们也可引进 f 是保定向变换和反定向变换概念.

设 p_0 为 D 中一点,变换 f 把 p_0 映为 Ω 中一点 q_0. 在 p_0 点邻域任作一环绕 p_0 点的简单闭路 c, f 把 c 映为一条环绕 q_0 点的简单闭路 γ. 若当动点 p 按反时针方向沿 c 运行时,像点 $q=f(p)$也按反时针方向沿 γ 运行,则称 f 在 p_0 点是**保定向变换**;若当点 p 按反时针方向沿 c 运行时,像点 q 按顺时针方向沿 γ 运行,则称 f 在 p_0 点是**反定向变换**.

现在要说明若同胚变换 f 在一点 $p_0\in D$ 是保定向变换,则在所有点 $p'\in D$ 也是保定向变换,也就要说明当动点 p 沿环绕 p' 的简单闭路 c' 按反时针方向运行一圈时,像点 $q=f(p)$沿环绕 $q'=f(p')$的简单闭路 γ' 也按反时针方向运行一圈. 为此我们作一如图 13-3 所示的辅助闭路,它是由 c, c' 的一部分和 l_1, l_2 组成,闭路的像曲线由 γ, γ' 的一部分和 l_1, l_2 的像 Γ_1, Γ_2 组成. 由于闭路一部分的定向决定整个闭路的定向,所以 γ' 的定向一定是反时针方向,因为 f 在 D 内有界闭域 D_1 (图 13-3 中虚线所示闭域)上一致连续,当曲线 l_1, l_2 充分靠近时,像曲线 Γ_1 与 Γ_2 也充分靠近,不可能出现如图 13-4 中情形. 用同样方法可以说明,在保定向与反定向的定义中与简单闭路 c 的选取无关.

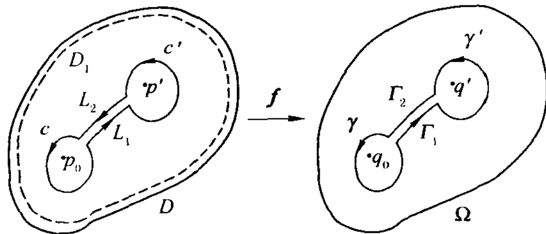


图 13-3

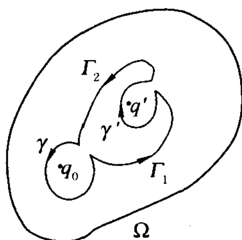


图 13-4

关于紧集间的同胚变换要简单些.

定理 13.12 设 $E\subset\mathbf{R}^n$ 为有界闭集,映射 $f: E\to\mathbf{R}^m$ 连续且单射,则由 $f^{-1}(f(x))=x\ (x\in E)$ 所确定的逆映射 $f^{-1}: f(E)\to E$ 连续.

证明 用反证法.假设 f^{-1} 不连续,$\exists y_0\in f(E)$, $\exists\varepsilon>0$,和趋于 y_0 的点列 $\{y_n\}\subset f(E)$,使

$$|f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)|\geqslant\varepsilon.$$

记 $x_0=f^{-1}(y_0)$, $x_n=f^{-1}(y_n)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$,由于 E 是有界闭集,总存在 $\{x_n\}\subset E$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x'\in E,\quad |x'-x_0|\geqslant\varepsilon.$$

再由 f 的连续与单射,得

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x')\neq f(x_0)=y_0.$$

这与 $\{y_n\}$ 的取法矛盾.所以 $f^{-1}: f(E)\to E$ 连续.证毕.

思考练习 试证明下列命题:

1. $y=\dfrac{x}{1-|x|}$ 是 $D=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|<1\}$ 到 $\mathbf{R}^n$ 间的同胚变换.

2. 设 $D=\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n\mid |x|<1\}$, $f: D\to\Omega$ 是同胚变换,若 $\{x_n\}\subset D$,且 $|x_n|\to1\ (n\to\infty)$,则 $|f(x_n)|\to1\ (n\to\infty)$.

第十四章　多元函数微分学

§1　偏导数与全微分

1.1　多元函数的偏导数

二元函数 $z=f(x,y)$ 中若把变量 y 固定,这时它就是变量 x 的一元函数,将此函数对 x 求导,所得导数就称为二元函数 $z=f(x,y)$ 关于 x 的偏导数.

定义 14.1　设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点邻域内定义.若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限为 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处关于 x 的**偏导数**,记作:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\quad 或\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

也记作:

$$f_x'(x_0,y_0)\quad 或\quad f_x(x_0,y_0).$$

注　$\frac{\partial f}{\partial x}$ 是一整体记号,单独 ∂f, ∂x 记号并没有赋予独立意义.

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上定义,在 D 的每一点都有关于 x 的偏导数,则

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\quad 或\quad f_x'(x,y)$$

是 D 上的二元函数,简记作 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 或 f_x' 或 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

同样可定义二元函数 $z=f(x, y)$在(x_0, y_0)点关于 y 的偏导数

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad 或 \quad f_y'(x_0, y_0),$$

及区域 D 上的偏导函数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 或 f_y'. 所以二元函数在 D 上有两个一阶偏导数.

例 1 设 $f(x, y)=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$,求 $f_x'(0, 0)$, $f_y'(0, 0)$.

解 因 $f(x, 0)=\arctan x$,所以

$$f_x'(0, 0)=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0}=1.$$

由对称性知 $f_y'(0, 0)=1$.

例 2 设 $u=x^y\sin z(x>0)$,求其一阶偏导数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=yx^{y-1}\sin z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=x^y\ln x\sin z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^y\cos z$.

由一元函数导数的几何意义,可得二元函数偏导数的几何意义. 设 $z_0=f(x_0, y_0)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$为曲面 S: $z=f(x, y)$上一点. 考察曲面 S 与平面 $y=y_0$ 的交线,偏导数 $f_x'(x_0, y_0)$即表示此交线在 M_0 点的切线斜率,交线在 M_0 点的切向量为:

$$\boldsymbol{T}_x=(1, 0, f_x'(x_0, y_0)).$$

同理, $f_y'(x_0, y_0)$表示曲面 S 与平面 $x=x_0$ 的交线在 M_0 点的切线斜率,交线在 M_0 点的切向量为(图 14-1):

$$\boldsymbol{T}_y=(0, 1, f_y'(x_0, y_0)).$$

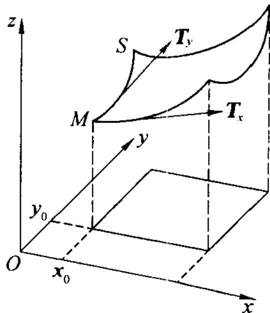


图 14-1

注 函数 $z=f(x, y)$在(x_0, y_0)

点的一阶偏导数存在，只说明两个一元函数 $z=f(x, y_0)$ 和 $z=f(x_0, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续，得不出在 (x_0, y_0) 点二元连续. 如

$$f(x, y)=\begin{cases}1, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0.\end{cases}$$

有 $f_x'(0, 0)=f_y'(0, 0)=0$，显然函数在原点不二元连续.

例 3 设 $a>b>1$，试证明 $a^{b^a}>b^{a^b}$.

证明 问题等价于证明不等式

$$\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a.$$

令 $y=\ln b>0$，$x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1$，这样证上述不等式只要证明

$$\ln x>y(xe^y-e^{xy}).$$

为此，在区域 $x>1$，$y>0$ 上考虑二元函数 $f(x, y)=xe^y-e^{xy}$. 因 $f_y'(x, y)=xe^y-xe^{xy}<0$，说明对固定的 $x>1$，函数 $f(x, y)$ 是 y 的单调递减函数，所以

$$f(x, y)<f(x, 0)=x-1.$$

如果 $f(x, y)\leqslant 0$，显然有

$$\ln x>yf(x, y)=y(xe^y-e^{xy});$$

如果 $f(x, y)>0$，即 $f(x, y)=e^y[x-e^{(x-1)y}]>0$，同样有

$$\ln x>(x-1)y>yf(x, y).$$

综上便知在 $x>1$，$y>0$ 上 $\ln x>y(xe^y-e^{xy})$ 成立.

思考练习 解答下列问题：

1. 求下列函数的一阶偏导数.

(1) $z=\arctan\dfrac{y}{x^2}$.　　(2) $z=\ln\left(x+\dfrac{y}{x^2}\right)$.

(3) $u=e^z\dfrac{\cos x}{\sin y}$.　　(4) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

2. 设 $z=\ln(e^x+e^y)$，试证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

3. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明 $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=1$.

4. 设 $u=\mathrm{e}^x\cos y$, $v=\mathrm{e}^x\sin y$,证明 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

5. 设 $u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta$, $v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$,试证明

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

6. 设 $f(x, y)$在区域 D 上满足

$$f_x'(x, y)\equiv 0\equiv f_y'(x, y),$$

证明 $f(x, y)\equiv C$;若 $f_x'(x, y)\equiv 0$,试问 $f(x, y)$在 D 上是否可以写成 $\varphi(y)$.

7. 设 $f(x, y)$在凸区域 D 上满足

$$|f_x'(x, y)|\leqslant M,\quad |f_y'(x, y)|\leqslant M,$$

试证明 $f(x, y)$在 D 上一致连续.

8. 设 $f(x, y)$在 $a\leqslant x<b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续,且对任意固定的 $y\in[c, d]$,都存在$\lim\limits_{x\to b}f(x, y)=\varphi(y)$. 若有关系式

$$|f_y'(x, y)|\leqslant M\quad (a\leqslant x<b,\ c\leqslant y\leqslant d),$$

试证明在补充定义 $f(b, y)=\varphi(y)$后,函数 $f(x, y)$在 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续.

1.2 多元函数的全微分

研究函数 $z=f(x, y)$在一点(x_0, y_0)的性质,仅有偏导数概念是不够的,需要有能提供函数在一点全部信息的概念. 如几何上由它能推知曲面 $z=f(x, y)$ 在$(x_0, y_0, z_0=f(x_0, y_0))$点的切平面存在,或函数 $z=f(x, y)$在(x_0, y_0)点邻域可用一次函数

$$f(x_0, y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$$

充分好地逼近,这就需要引进全微分概念.

定义 14.2 若函数 $z=f(x, y)$在(x_0, y_0)点的改变量 Δz 可表示成

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$$

$$=A\Delta x+B\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right),$$

其中 A, B 与 Δx, Δy 无关,而仅与 x_0, y_0 有关.则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点**可微**,并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点的**微分**,记作

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y.$$

所以微分即函数改变量的线性主要部分.由函数在 (x_0,y_0) 点可微,得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]=0,$$

这说明函数在 (x_0,y_0) 点连续.

若在微分定义中,令 $\Delta y=0$,得到

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+o(|\Delta x|),$$

令 $\Delta x\to 0$,即得 $f_x'(x_0,y_0)=A$.同理,令 $\Delta x=0$,可得 $f_y'(x_0,y_0)=B$,所以函数在一点可微,则函数在该点的两个偏导数存在,且微分可记为

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y.$$

这也说明函数若可微,其微分式是唯一的.

再定义自变量的微分 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$,则函数微分最终可记作

$$\mathrm{d}f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_x'(x_0,y_0)\mathrm{d}y.$$

对一元函数来说,可微与可导等价.对二元函数来说,可微必有偏导数存在.反之,偏导数存在,函数可以不连续,当然更谈不上可微.但对偏导数加些条件,可推出函数可微.

定理 14.1 若函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x'(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续(蕴涵着偏导数在该点某邻域存在),则函数在 (x_0,y_0) 点可微.

证明 利用一元函数的微分中值定理,我们有

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)\\ &=f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,\ y_0)+f(x_0+\Delta x,\\ &\quad y_0)-f(x_0,\ y_0)\\ &=f_y'(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y+f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)\Delta x\\ &\quad (0<\theta_1,\ \theta_2<1)\\ &=f_x'(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y'(x_0,\ y_0)\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y,\end{aligned}$$

其中

$$\alpha=f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)-f_x'(x_0,\ y_0),$$

$$\beta=f_y'(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)-f_y'(x_0,\ y_0).$$

因偏导数在$(x_0,\ y_0)$点连续,所以有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta=0,$$

也就有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0,$$

即得

$$\Delta z=f_x'(x_0,\ y_0)\Delta x+f_y'(x_0,\ y_0)\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

按定义知函数在$(x_0,\ y_0)$点可微. 证毕.

综上可知,函数在一点连续和偏导数存在,是函数在该点可微的必要条件. 偏导数在一点连续,是函数在该点可微的充分条件,但不是必要条件. 例如函数

$$f(x,\ y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

它在全平面可微,但$f_x'(x,\ y)$, $f_y'(x,\ y)$在$(0,\ 0)$点不连续.

先说明它在$(0,\ 0)$点可微. 因

$$\begin{aligned}&f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0,\ 0)\\ &=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}\\ &=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\quad(\Delta x,\ \Delta y\to 0),\end{aligned}$$

所以 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点可微且

$$f_x'(0, 0) = 0 = f_y'(0, 0),$$

又因

$$f_x'(x, y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

$$f_y'(x, y) = \begin{cases} 2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

所以当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时,两偏导数在 (x, y) 点连续,故函数在 (x, y) 点可微. 由 (x, y) 点的任意性,知函数在全平面可微.

当 $y=x\to 0$ 时, $f_x'(x, y)$ 极限不存在,故 $f_x'(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不连续. 同理 $f_y'(x, y)$ 也只在 $(0, 0)$ 点不连续.

例 计算 $2.04^{2.02}$ 的近似值.

解 取 $f(x, y) = x^y$, $x = 2$, $\Delta x = 0.04$, $y = 2$, $\Delta y = 0.02$. 因

$$f_x'(x, y) = yx^{y-1}, \quad f_y'(x, y) = x^y\ln x$$

在 $(2, 2)$ 点连续,由定理 14.1 知 $f(x, y)$ 在 $(2, 2)$ 点可微,也就有近似公式

$$\begin{aligned} f(2.04, 2.02) &\approx f(2, 2) + f_x'(2, 2)\times 0.04 + f_y'(2, 2) \\ &\quad \times 0.02 \\ &= 4 + 4\times 0.04 + 4\ln 2\times 0.02 \\ &= 4.16 + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3\times 3^3}\right)\times 0.08 \\ &= 4.16 + 0.69\times 0.08 \\ &= 4.22. \end{aligned}$$

这里用到

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3}\right).$$

思考练习 解答下列问题:

1. 下列说法是否与微分定义等价:

(1) $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x+\beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$,其中

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x, \Delta y)=0=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta x, \Delta y).$$

(2) $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\alpha(\Delta x)\Delta x+\beta(\Delta y)\Delta y$,其中

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x)=0,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\beta(\Delta y)=0.$$

2. 设 $f_x'(x_0, y_0)$存在,$f_y'(x, y)$在(x_0, y_0)点连续,证明$f(x, y)$在(x_0, y_0)点可微.

3. 设 $f(x, y)$在区域 D 上两个偏导数有界,试问此时$f(x, y)$在 D 上可微吗?请考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

4. 求下列数值的近似值:

(1) $\ln[(1.02)^{\frac{1}{4}}+(0.96)^{\frac{1}{4}}-1]$.

(2) $\sqrt{(1.02)^2+(1.97)^2}$.

5. 设 $f(x, y)$在$(0, 0)$点可微,$f(0, 0)=0$. 若 $h(x, y)$在$(0, 0)$点连续,试证明函数 $F(x, y)=h(x, y)\cdot f(x, y)$在$(0, 0)$点可微.

§2 多元复合函数的偏导数求法

2.1 链锁法则

我们来讨论多元复合函数求偏导数公式. 设 $u=f(x, y)$,而 x、y 又是自变量 s、t 的函数:

$$x=\varphi(s, t),\quad y=\psi(s, t).$$

求复合函数 $u=f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$的偏导数.

定理 14.2 设 $\frac{\partial x}{\partial s}$、$\frac{\partial x}{\partial t}$、$\frac{\partial y}{\partial s}$、$\frac{\partial y}{\partial t}$在点$(s, t)$都存在,又设$f(x, y)$在相应于$(s, t)$的点$(x, y)$处可微. 则复合函数$u=f[\varphi(s, t), \psi(s, t)]$在$(s, t)$点的两个偏导数存在,且

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

证明 我们只证关于 t 的公式. 若给 t 以改变量 Δt,相应地中间变量 x, y 有改变量

$$\begin{cases}\Delta x=\varphi(s, t+\Delta t)-\varphi(s, t),\\ \Delta y=\psi(s, t+\Delta t)-\psi(s, t).\end{cases}$$

由于$u=f(x, y)$在(x, y)点可微,所以有

$$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

或

$$\Delta u=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\alpha(\Delta x, \Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},$$

其中$\alpha(\Delta x, \Delta y)$满足

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha(\Delta x, \Delta y)=0,$$

并补充定义$\alpha(0, 0)=0$. 于是可得

$$\frac{\Delta u}{\Delta t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\alpha(\Delta x, \Delta y)\cdot\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\operatorname{sign}\Delta t.$$

由于 x, y 对 t 的连续性,当 $\Delta t\to 0$ 时,有 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$,从而有 $\alpha(\Delta x, \Delta y)\to 0$(此处用到补充定义),这样在上式中令 $\Delta t\to 0$ 取极限,即得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$ 证毕.

考察两个特殊情形. 设$u=f(x, y)$, $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 这时复合函数为一元函数,所以公式中偏导数记号应改为求导记号:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

又设 $u=f(x,\ y,\ t)$, $x=\varphi(s,\ t)$, $y=\psi(s,\ t)$,应用链锁法则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}.$$

注 如果写成下面形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial t},$$

就会导致混乱.因上式左、右两个 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 意义不同,右边的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是 u 作为 x、y、t 的函数时对 t 求偏导数;左边的 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 是 u 作为 s, t 的函数时对 t 求偏导数.所以书写时不要采用易引起混淆的写法.

例 1 设 $u=f\left(xy,\ \frac{y}{x}\right)$,求 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 我们可以引入中间变量 ξ、η,把它看成 $u=f(\xi,\ \eta)$, $\xi=xy$, $\eta=\frac{y}{x}$ 的复合函数,应用链锁法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial \xi}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

为了避免引入新的中间变量,我们常采取如下记法:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot x+f_2'\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=xf_1'+\frac{1}{x}f_2'.$$

例 2 设 $u=f(x,\ y,\ z)$, $y=\varphi(x,\ t)$, $t=\psi(x,\ z)$,求 $\frac{\partial u(x,\ z)}{\partial x}$.

解 由题意知 u 是因变量, x、z 是自变量, y、t 为中间变量,应用链锁法则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=f_1'+f_2'\left(\varphi_1'+\varphi_2'\frac{\partial t}{\partial x}\right)$$

$$=f_1'+f_2'\cdot\varphi_1'+f_2'\cdot\varphi_2'\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

例 3 求证一阶偏微分方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 有解 $u=f(x^2+y^2)$，其中 f 为任意连续可微函数.

解法一 作自变量变换：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

这时函数 $u(x,y)$ 变为函数 $U(r,\theta)$，习惯上我们把新函数仍记作 $u(r,\theta)$. 逆变换

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$

把 $u(r,\theta)$ 又变回到原函数 $u(x,y)$，把 r,θ 视作中间变量得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{x}{r}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\dfrac{y}{r^2}\right),\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{y}{r}+\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\left(\dfrac{x}{r^2}\right).\end{cases}$$

由方程 $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 和上式得

$$-\frac{x^2+y^2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}=0\quad 或\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=0,$$

即 u 只是 r 的函数，故 $u=f(x^2+y^2)$.

若把 x,y 视作中间变量应用链锁法则得

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)=-y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

故 $u=f(x^2+y^2)$.

解法二 作自变量变换：

$$\xi=x^2+y^2,\ \eta=y,$$

因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot 2x+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot 0,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot 2y+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot 1,$$

所以

$$0 = y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = -x\frac{\partial u}{\partial \eta} \quad 或 \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0,$$

即 u 只是 ξ 的函数,故 $u = f(x^2 + y^2)$.

思考练习 解答下列问题:

1. 用链锁法则求 $f(x) = u(x)^{v(x)}\ (u(x) > 0)$ 的导数.

2. 用链锁法则求 $z = x^{y^x}\ (x > 0)$ 的偏导数.

3. 求下列复合函数的偏导数:

(1) $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

(2) $u = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$.

4. 设 $u = x^n f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$,其中 f 可微,试证明 u 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = n \cdot u.$$

反之,作自变量 $\xi = x^n$, $\eta = \frac{y}{x}$, $\zeta = \frac{z}{x}$ 的变换,求上述方程的解.

5. 设函数 $f(x, y, z)$ 满足条件

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z),\ t > 0$$

则称 f 为 n 次齐次函数(n 不必为整数). 试证明 $f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数的充分必要条件是:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = nf(x, y, z).$$

6. 作自变量替换 $x = \sqrt{vw}$, $y = \sqrt{wu}$, $z = \sqrt{uv}$,它把 $f(x, y, z)$ 变为 $F(u, v, w)$,试证明

$$xf_x' + yf_y' + zf_z' = uF_u' + vF_v' + wF_w'.$$

7. 利用自变量变换 $\xi = 2xy$, $\eta = x^2 - y^2$,求下列方程的解:

(1) $y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.　　(2) $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

8. 作自变量变换 $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$,求方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

的解.

9. 设 $u(x, y)$, $v(x, y)$为连续可微函数,且满足方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

若作变换 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,试证明上述方程变为

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}.$$

2.2 一阶微分形式的不变性

当 x, y 为自变量时,函数 $u=f(x, y)$的微分为:

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

这里 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$. 若 x, y 不是自变量,而是变量 s, t 的函数,这时复合函数 $u=f[x(s, t), y(s, t)]$的全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\frac{\partial u}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

形式上与 x, y 是自变量时的微分一样,现在 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 不是函数的改变量,而是函数的微分,这就是一阶微分形式的不变性.

若 u、v 是 x、y 的函数,则有微分运算法则:

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(u\cdot v)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}.$$

因为当 u, v 是自变量时,上面等式显然成立,由一阶微分形式的不变性,当 u, v 是函数时,上面等式也成立.

利用微分求偏导数,同时求出所有偏导数. 如本章 2.1 节例

1 用微分来解得

$$\mathrm{d}u = f_1'\mathrm{d}(xy) + f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= f_1'(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) + f_2'\left(-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x + \frac{1}{x}\mathrm{d}y\right)$$

$$= \left(yf_1' - \frac{y}{x^2}f_2'\right)\mathrm{d}x + \left(xf_1' + \frac{1}{x}f_2'\right)\mathrm{d}y.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yf_1' - \frac{y}{x^2}f_2', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xf_1' + \frac{1}{x}f_2'.$$

利用微分求偏导数,可以不必事先区分变量是自变量还是中间变量.

2.3 同胚变换的 Jacobi① 行列式

设 $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ 给出 uv 平面区域 D 到 xy 平面区域 Ω 的同胚变换,再设函数 $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ 在 D 上有一阶连续偏导数,则称行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

为变换的 **Jacobi 行列式**,记作 $\dfrac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$.

设上述同胚变换把 $p_0(u_0, v_0) \to q_0(x_0, y_0)$. 过 p_0 作一位于 D 内的光滑曲线

$$u = u(t), \quad v = v(t),$$

设 $u_0 = u(t_0)$, $v_0 = v(t_0)$,曲线在 p_0 点的斜率 m 是

$$m = \frac{v'(t_0)}{u'(t_0)}.$$

---

① 雅可比(德国数学家,1804～1851).

又像曲线

$$x=\varphi[u(t),\ v(t)],\quad y=\psi[u(t),\ v(t)]$$

在相应点 $q_0(x_0,\ y_0)$ 处的斜率 k 为:

$$k=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{\psi_u'(u_0,\ v_0)u'(t_0)+\psi_v'(u_0,\ v_0)v'(t_0)}{\varphi_u'(u_0,\ v_0)u'(t_0)+\varphi_v'(u_0,\ v_0)v'(t_0)}$$

$$=\frac{\psi_u'(u_0,\ v_0)+\psi_v'(u_0,\ v_0)m}{\varphi_u'(u_0,\ v_0)+\varphi_v'(u_0,\ v_0)m}.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}m}=\frac{\begin{vmatrix}\varphi_u' & \varphi_v'\\ \psi_u' & \psi_v'\end{vmatrix}}{[\varphi_u'(u_0,\ v_0)+\varphi_v'(u_0,\ v_0)m]^2}.$$

当 $\left.\dfrac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}\right|_{(u_0,\ v_0)}>0$ 时, k 是 m 的递增函数,即原曲线 $u=u(t),\ v=v(t)$ 在 p_0 点按逆时针方向转动时,像曲线在 q_0 点也按逆时针方向转动,所以变换在 p_0 点是保定向的(图 14-2).

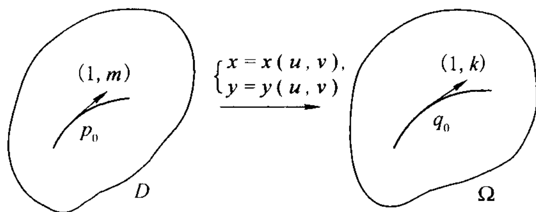


图 14-2

当 $\left.\dfrac{\partial(\varphi,\ \psi)}{\partial(u,\ v)}\right|_{(u_0,\ v_0)}<0$ 时, k 是 m 的递减函数,表明原曲线在 p_0 点按逆时针方向转动时,像曲线在 q_0 点按顺时针方向转动,所以变换在 p_0 点是反定向的.

我们与一元函数作个比较. 设 $D,\ \Omega$ 是区域,变换 $x=\varphi(u,\ v),\ y=\psi(u,\ v)$: $D\to\Omega$ 为满射,函数 $\varphi,\ \psi$ 在 D 上连续可微. 与一元映射不同的是,由

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}>0\quad 或\quad \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}<0,$$

推不出变换是单射;与一元映射相同的是,若变换是单射,则

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \geqslant 0 \quad 或 \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \leqslant 0.$$

事实上,假设 D 内存在两点 $p_i(u_i, v_i)$ $(i=1, 2)$,有

$$\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_1, v_1)} > 0, \quad \left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_2, v_2)} < 0,$$

由上面讨论知变换在 p_1 点保定向,在 p_2 点反定向,而由第十三章第 3.3 节讨论知,同胚变换在一点保定向,必在所有点保定向,这与 p_1 点保定向, p_2 点反定向矛盾.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 D, Ω 为空心单位圆区域,证明映射 $x=u^2-v^2$, $y=2uv$: $D\to\Omega$ 是满射但非单射,并求 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

2. 设 D, Ω 是凸域,映射 $x=f(u, v)$, $y=v$: $D\to\Omega$ 是满射,且 f 在 D 上连续, $f_u'(u, v)>0$. 证明映射为单射和逆映射在 Ω 上连续.

3. 举出从区域 D 到 Ω 的同胚变换 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$,它的 Jacobi 行列式在 D 上有零点.

4. 设 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$为区域 D 到 Ω 的同胚变换, x 与 y 在 D 上有连续偏导数,逆变换 $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$在 Ω 上也有连续偏导数,证明

(1) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=1$.

(2) $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 在 D 上恒大于 0 或恒小于 0.

§3 高阶偏导数与高阶全微分

3.1 多元函数的高阶偏导数

函数 $f(x, y)$的一阶偏导数 $f_x'(x, y)$, $f_y'(x, y)$仍是区域 D 上的二元函数,若对它们还可求一阶偏导数,其结果称为

$f(x, y)$的二阶偏导数. f_x'关于 x 的偏导数,称为 f 关于 x 的二阶偏导数,记为:

$$(f_x')_x' = f_{xx}'' \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

f_x'关于 y 的偏导数,称为 f 的混合二阶偏导数,记为:

$$(f_x')_y' = f_{xy}'' \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

同样有

$$(f_y')_x' = f_{yx}'' \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$(f_y')_y' = f_{yy}'' \quad 或 \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

二元函数共有四个二阶偏导数,每个再求一次,共得 2^3 个三阶偏导数,一般地有 2^n 个 n 阶偏导数. 事实上我们将发现很多偏导数相等. 如 $f(x, y) = \mathrm{e}^x \sin y$,它们的四个二阶偏导数为:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \mathrm{e}^x \cos y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^x \cos y.$$

可见两个混合偏导数相等. 一般地有求偏导数与次序无关定理.

定理 14.3 若 $f_{xy}''(x, y)$与 $f_{yx}''(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续,则

$$f_{xy}''(x_0, y_0) = f_{yx}''(x_0, y_0).$$

证明 定理条件蕴涵着函数 f_{xy}'' 与 f_{yx}'' 在(x_0, y_0)某一邻域内存在,因而 f_x'与 f_y'也在该邻域内存在,所以 $f(x, y)$分别关于 x 和关于 y 一元连续. 令

$$I = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0).$$

为了能连续两次应用一元微分中值定理,令

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0).$$

则

$$\begin{aligned}I &= \varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)\\&=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta_1<1)\\&=[f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0)]\Delta x\\&=f_{xy}''(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (0<\theta_2<1).\end{aligned}$$

同理,令 $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,\ y)-f(x_0,\ y)$,则

$$\begin{aligned}I &= \psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)\\&=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y \quad (0<\theta_3<1)\\&=[f_y'(x_0+\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)-f_y'(x_0,\ y_0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\\&=f_{yx}''(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y \quad (0<\theta_4<1).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&f_{xy}''(x_0+\theta_1\Delta x,\ y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y\\=&f_{yx}''(x_0+\theta_4\Delta x,\ y_0+\theta_3\Delta y)\Delta x\Delta y.\end{aligned}$$

上式消去因子 $\Delta x\Delta y$,再令 $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$,由两者在点 $(x_0,\ y_0)$ 连续,即得

$$f_{xy}''(x_0,\ y_0)=f_{yx}''(x_0,\ y_0).$$ 证毕.

若所涉及的偏导数均在区域 D 上连续,应用定理 14.3,可得求偏导数与次序无关.如

$$f_{yyxx}=f_{yxyx},$$

这是因为对 f_y 应用定理 14.3,有 $f_{yyx}=f_{yxy}$,等式再对 x 求偏导,即得上式.类似有

$$f_{yyxx}=f_{yxyx}=f_{yxxy}=f_{xyxy}=f_{xxyy}.$$

若二元函数的所有 n 阶偏导数都连续(可推出低于 n 阶的偏导数也连续),则可以集中先对 x 求偏导数,然后再对 y 求偏导数,所以二元函数共有 $(n+1)$ 个 n 阶偏导数,它们是:

$$f_{x^n},\ f_{x^{n-1}y},\ f_{x^{n-2}y^2},\ \cdots,\ f_{xy^{n-1}},\ f_{y^n}.$$

注 为了说明定理 14.3 中条件的重要,我们考察下面反例.

$$f(x,\ y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

它的一阶偏导数为:

$$f_x'(x, y) = \begin{cases} y\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right], & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$$

$$f_y'(x, y) = \begin{cases} x\left[\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-\dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right], & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$$

所以 $f_x'(0, y)=-y$, $f_{xy}''(0, 0)=-1$, 和 $f_y'(x, 0)=x$, $f_{yx}''(0, 0)=1$,这例子说明定理条件不满足时,可以有

$$f_{xy}''(0, 0)\neq f_{yx}''(0, 0).$$

设 D 为区域, $C^{(n)}(D)$表示在 D 上有直到 n 阶连续偏导数的函数类,记号 $C^{(n)}(\overline{D})$表示低于和等于 n 阶的偏导数都可连续开拓到闭域 $\overline{D}$ 的函数类.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 f_x', f_y', f_{xy}'' 在 (x_0, y_0) 点邻域存在,且 f_{xy}'' 在 (x_0, y_0)点连续,证明 f_{yx}'' 在 (x_0, y_0)点存在,且

$$f_{xy}''(x_0, y_0)=f_{yx}''(x_0, y_0).$$

2. 若 $f(x, y)$的两个混合偏导数在(x_0, y_0)点都不连续,问两混合偏导数 $f_{xy}''(x_0, y_0)$与 $f_{yx}''(x_0, y_0)$能否相等. 考察例子 $f(x, y)=(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$, $f(0, 0)=0$.

3.2 多元复合函数的高阶偏导数

设 $u=f(x, y)$, $x=\varphi(s, t)$, $y=\psi(s, t)$,求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. 我们假设函数在其定义区域上有直至二阶连续偏导数. 已知

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

同理可求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$.

例 1 设 $u=f\left(xy,\frac{y}{x}\right)$,求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解 因 $\frac{\partial u}{\partial x}=yf_1'-\frac{y}{x^2}f_2'$,所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y\left(yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right)-\frac{y}{x^2}\left(yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right)+\frac{2y}{x^3}f_2'$$

$$=y^2f_{11}''-\frac{2y^2}{x^2}f_{12}''+\frac{y^2}{x^4}f_{22}''+\frac{2y}{x^3}f_2';$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=y\left(xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)+f_1'-\frac{y}{x^2}\left(xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)-\frac{1}{x^2}f_2'$$

$$=xyf_{11}''-\frac{y}{x^3}f_{22}''+f_1'-\frac{1}{x^2}f_2'.$$

例 2 证 Laplace① 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

在极坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 下的方程为:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0.$$

证明 因

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right),\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{x}{r^2}.$$

所以

① 拉普拉斯(法国,数学物理学家,1749~1827).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{x}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\right]\frac{x}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{x}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\left(-\frac{y}{r^2}\right)\right]\left(-\frac{y}{r^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{2xy}{r^4}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{y^2}{r^4}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{y^2}{r^3}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{x}{r^2}\right]\frac{y}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{x^2}{r^3}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{y}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{x}{r^2}\right]\frac{x}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{2xy}{r^3}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{x^2}{r^4}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{x^2}{r^3}$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{2xy}{r^4}\right).$$

于是有

$$0=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\cdot\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

例 3 若函数 $f(x, y)$满足

$$f(tx, ty)=t^n f(x, y)\quad(t>0),$$

则称 f 是 n 次齐次函数.若 $f(x, y)$是一次齐次函数,证明:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

证明 由 $f(tx, ty)=tf(x, y)$,固定 x, y 对 t 求导得

$$xf_x'(tx, ty)+yf_y'(tx, ty)=f(x, y).$$

这里记号 $f_x'(tx, ty)$理解为 $f(x, y)$先对 x 求偏导,然后变量用 tx, ty 代入, $f_y'(tx, ty)$也作同样理解.上式令 $t=1$ 得

$$xf_x'(x, y)+yf_y'(x, y)=f(x, y).$$

(也可如此理解,固定 x_0, y_0,对 t 求导得

$$x_0 f_x'(tx_0, ty_0) + y_0 f_y'(tx_0, ty_0) = f(x_0, y_0).$$

令 $t=1$,再由 x_0, y_0 的任意性,将 x_0, y_0 改写成 x, y)

上式分别再对 x, y 求偏导数,得

$$f_x' + xf_{xx}'' + yf_{yx}'' = f_x' \quad 或 \quad xf_{xx}'' = -yf_{yx}'';$$

$$f_y' + yf_{yy}'' + xf_{xy}'' = f_y' \quad 或 \quad yf_{yy}'' = -xf_{xy}''.$$

由此推出

$$xyf_{xx}'' \cdot f_{yy}'' = xy(f_{xy}'')^2,$$

当 $xy\neq0$ 时,得到

$$f_{xx}'' \cdot f_{yy}'' = (f_{xy}'')^2.$$

再由二阶偏导数连续性,上式当 $xy=0$ 的点处也成立.

例 4 通过自变量变换: $\xi=x+at$, $\eta=x-at$,求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的解.

解 因

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} = 0.$$

由此推出

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi),$$

$$u = \int f(\xi)d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$$

这里 φ, ψ 是二次连续可微函数. 回到原变量得方程的解为:

$$u(x, t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数的高阶偏导数 $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$:

(1) $u=\dfrac{x+y}{x-y}$; (2) $u=\ln(ax+by)$.

2. 求下列函数的二阶偏导数:

(1) $u=f(x+y, xy)$; (2) $u=f(x^2+y^2+z^2)$.

3. 试证明 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$满足 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

4. 证明函数 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ $(a, b$ 实数)满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (t>0).$$

5. 证明形如 $u(x, y)=f(x)g(y)$的函数满足方程

$$u\cdot u''_{xy}=u'_x\cdot u'_y.$$

并证明断言的逆.(提示:作函数变换 $u=\ln z$)

6. 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 形如 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$的解.

7. 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 形如 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$的解.

8. 通过自变量变换 $\xi=x+y$, $\eta=x-y$,证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

的解为 $u=(x+y)\varphi(x-y)+\psi(x-y)$.

9. 若作变换 $\xi=x+\lambda_1 y$, $\eta=x+\lambda_2 y$ 把方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ (AC-B^2<0,\ C\neq 0)$$

变为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$,试证明 λ_1, λ_2 是方程

$$C\lambda^2+2B\lambda+A=0$$

的两个相异实根.

10. 证明方程 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 的解为

$$u=\frac{f(t+r)}{r}+\frac{g(r-t)}{r}.$$

11. 证明函数 $u=\arctan\frac{y}{x}$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

12. 求方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 形如 $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$的解(限制在第一象限上讨论).

3.3 多元函数的高阶全微分

当 x, y 为自变量时,二元函数 $u=f(x, y)$的微分为

$$\mathrm{d}u=f_x'(x, y)\mathrm{d}x+f_y'(x, y)\mathrm{d}y.$$

这里 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$ 与 x, y 无关,所以相对于 x, y 来说是常数.我们将 $\mathrm{d}u$ 看成 x, y 的函数,再求一次微分,其结果称为 $u=f(x, y)$的二阶微分,记作

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u=\mathrm{d}(\mathrm{d}u)&=\frac{\partial}{\partial x}(f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y)\mathrm{d}x\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}(f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y)\mathrm{d}y\\&=f_{xx}''(\mathrm{d}x)^2+2f_{xy}''\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f_{yy}''(\mathrm{d}y)^2\\&=f_{xx}''\mathrm{d}x^2+2f_{xy}''\mathrm{d}x\mathrm{d}y+f_{yy}''\mathrm{d}y^2.\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}x^2$ 是$(\mathrm{d}x)^2$ 的缩写,不是对 x^2 求微分.

如把偏导数 $\frac{\partial}{\partial x}$ 运算理解成算子,它是把 $C^{(1)}(D)$中函数映为 $C(D)$中函数的算子,

$$\frac{\partial}{\partial x}: C^{(1)}(D) \to C(D), \quad f(x, y) \mapsto \frac{\partial f(x, y)}{\partial x},$$

引入算子概念后,一阶微分可视作算子 $\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}$ 作用到 f 上的结果,

$$\mathrm{d}u = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)f.$$

二阶微分可记作

$$\mathrm{d}^2u = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f,$$

即对 f 连续作用两次算子 $\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}$ 运算的结果,应用数学归纳法,可以证明

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^n u &= \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\mathrm{d}x^{n-k}\mathrm{d}y^k\left(C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right).\end{aligned}$$

若 x, y 不是自变量,而是中间变量,这时 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 不能视作常数,仍是自变量的函数. 应用微分运算法则,得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u = {}& \mathrm{d}f_x'(x, y)\mathrm{d}x + f_x'(x, y)\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}f'_y(x, y)\mathrm{d}y \\ & + f_y'(x, y)\mathrm{d}^2y,\end{aligned}$$

再由一阶微分形式的不变性,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2u = {}& [f''_{xx}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{xy}(x, y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x + f_x'(x, y)\mathrm{d}^2x \\ & + [f''_{yx}(x, y)\mathrm{d}x + f''_{yy}(x, y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}y + f_y'(x, y)\mathrm{d}^2y \\ = {}& f''_{xx}(\mathrm{d}x)^2 + 2f''_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{yy}(\mathrm{d}y)^2 + f_x'\mathrm{d}^2x + f_y'\mathrm{d}^2y.\end{aligned}$$

可见,高阶微分没有形式的不变性.

试用微分来求 $u=f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$的二阶偏导数. 因

$$\mathrm{d}u = f_1'\mathrm{d}(xy) + f_2'\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}
d^2u &= \left[f''_{11}\,d(xy)+f''_{12}\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]d(xy)+f'_1 d^2(xy) \\
&\quad +\left[f''_{21}\,d(xy)+f''_{22}\,d\left(\frac{y}{x}\right)\right]d\left(\frac{y}{x}\right)+f'_2 d^2\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= f''_{11}\,(ydx+xdy)^2+2f''_{12}\,(ydx+xdy)\left(-\frac{y}{x^2}dx\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{x}dy\right)+f''_{22}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right)^2+f'_1(2dxdy) \\
&\quad +f'_2\left(\frac{2y}{x^3}dx^2-\frac{2}{x^2}dxdy\right) \\
&= \left(y^2f''_{11}-\frac{2y^2}{x^2}f''_{12}+\frac{y^2}{x^4}f''_{22}+\frac{2y}{x^3}f'_2\right)dx^2 \\
&\quad +2\left(xyf''_{11}-\frac{y}{x^3}f''_{22}+f'_1-\frac{1}{x^2}f'_2\right)dxdy \\
&\quad +\left(x^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{x^2}f''_{22}\right)dy^2.
\end{aligned}$$

比较 dx^2, $dxdy$, dy^2 的系数,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2f''_{11}-\frac{2y^2}{x^2}f''_{12}+\frac{y^2}{x^4}f''_{22}+\frac{2y}{x^3}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xyf''_{11}-\frac{y}{x^3}f''_{22}+f'_1-\frac{1}{x^2}f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2f''_{11}+2f''_{12}+\frac{1}{x^2}f''_{22}.$$

§4 多元隐函数的求导法

本节讨论由一个方程所确定的隐函数求导,和由方程组所确定的几个隐函数求导.至于隐函数的存在性与可导性将在下章讨论.

4.1 一个方程的情形

设方程 $F(x, y, z)=0$ 在区域 D 上确定 z 是 x, y 的函数,

称 $z=z(x, y)$为隐函数,将它代入方程得 D 上恒等式

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0.$$

上式分别对 x, y 求偏导,得

$$F_x' + F_z' \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y' + F_z' \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad ①$$

当 $F_z' \neq 0$ 时,求得隐函数的偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_z'}. \qquad ②$$

求隐函数的二阶偏导数,先对①式再求偏导数,得

$$\begin{cases} F_{xx}'' + F_{xz}'' \dfrac{\partial z}{\partial x} + \left(F_{zx}'' + F_{zz}'' \dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + F_z' \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ F_{xy}'' + F_{xz}'' \dfrac{\partial z}{\partial y} + \left(F_{zy}'' + F_{zz}'' \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} + F_z' \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \\ F_{yy}'' + F_{yz}'' \dfrac{\partial z}{\partial y} + \left(F_{zy}'' + F_{zz}'' \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial z}{\partial y} + F_z' \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

将①式代入上式即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_{xx}''(F_z')^2 - 2F_{xz}''F_x'F_z' + F_{zz}''(F_x')^2}{(F_z')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{F_{xy}''(F_z')^2 - F_{xz}''F_y'F_z' - F_{yz}''F_x'F_z' + F_{zz}''F_x'F_y'}{(F_z')^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{F_{yy}''(F_z')^2 - 2F_{yz}''F_y'F_z' + F_{zz}''(F_y')^2}{(F_z')^3}.$$

例 1 设方程 $F(x, y, z)=0$ 可分别确定 x, y, z 是其余变量的函数,证明:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1,$$

证明 由②知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x'}{F_z'},$$

同理有

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y'}{F_x'}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z'}{F_y'}.$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\left(-\frac{F_x'}{F_z'}\right)\cdot\left(-\frac{F_y'}{F_x'}\right)\cdot\left(-\frac{F_z'}{F_y'}\right)=-1.$$

注 若把 $F(x, y, z)=0$ 看成一曲面，$p_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面上一点. 用平面 $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ 去截此曲面，得曲面上三条过 p_0 点的曲线，结果表明这三条曲线在 p_0 点的斜率乘积为 -1. 所以总有一条曲线在 P_0 点是递减的. 这例也说明偏导数记号只能作为一个整体来理解，不能理解为一分式.

例 2 设方程 $F(xy, y+z, xz)=0$ 确定隐函数 $z=z(x, y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 方程对 x 求偏导数，得

$$F_1'\cdot y+F_2'\frac{\partial z}{\partial x}+F_3'\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yF_1'+zF_3'}{F_2'+xF_3'}.$$

方程对 y 求偏导数，得

$$F_1'\cdot x+F_2'\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F_3'x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xF_1'+F_2'}{F_2'+xF_3'}.$$

例 3 设函数 $z=f(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

若 y 能确定为 x, z 的函数，求证 $y=g(x, z)$ 也满足方程

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\right)^2.$$

证明 由一阶微分形式的不变性，得

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

再对上式求微分时,因 z 是自变量,所以

$$0=\mathrm{d}^2 z=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}^2 y.$$

求出函数 $y=g(x, z)$的二阶微分:

$$-\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}^2 g=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial g}{\partial z}\mathrm{d}z\right)^2.$$

将上式与 $\mathrm{d}^2 g=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2$ 比较,得出函数 g 的二阶偏导数:

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}=\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2},\\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial^2 g}{\partial z^2}=\left(\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{cases}$$

如果我们将 $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$ 用已知函数 $f(x, y)$的偏导数表出并代入上式,得 g 的三个二阶偏导数,然后验证它们满足方程,这样做思路虽清晰,但显得死板和烦琐.灵活做法是从上面三个式子与条件得

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}&=\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2+2\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2\\&=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\right)^2.\end{aligned}$$

消去$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$,即得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial z}\right)^2.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 对下列方程所确定的 $z=z(x, y)$,求其二阶偏导数:

(1) $xy+yz+zx=1$; (2) $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=0$.

2. 求下列方程所确定的 $z=z(x, y)$的一阶偏导数:

(1) $f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$;

(2) $f(xy, z-y)=0$.

3. 设 $z=z(x, y)$由方程 $x^2+y^2+z^2=yf\left(\frac{z}{y}\right)$所确定,证明

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz.$$

4. 设 $u=u(x, y, z)$由方程 $F(u^2-x^2, u^2-y^2, u^2-z^2)=0$ 所确定,试证明

$$\frac{u_x'}{x}+\frac{u_y'}{y}+\frac{u_z'}{z}=\frac{1}{u}.$$

5. 设 $z=z(x, y)$由方程 $F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)=0$($a$, b 及 c 是常数)所确定,试证明

(1) $(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c$.

(2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2$.

6. 证明由方程 $y=x\varphi(z)+\psi(z)$所确定的隐函数满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

7. 设 $z=z(x, y)$满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

若由 $z=z(x, y)$可以确定 y 是 x, z 的函数,试证明 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$.

8. 证明 $z=f(x,\ y)$ 的等位线是直线的充要条件是：$(f_y')^2 f_{xx}''-2f_x'f_y'f_{xy}''+(f_x')^2 f_{yy}''=0$.

9. 求出函数 $u=F(x,\ y,\ z)$的等位面是平面的充要条件.

4.2 方程组的情形

设方程组 $F(x,\ y,\ z)=0$, $G(x,\ y,\ z)=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$和 $z=z(x)$,将它们代入方程组得恒等式：

$$\begin{cases} F(x,\ y(x),\ z(x))\equiv 0, \\ G(x,\ y(x),\ z(x))\equiv 0. \end{cases}$$

对上面恒等式求导得

$$\begin{cases} F_x'+F_y'\cdot y'(x)+F_z'\cdot z'(x)=0, \\ G_x'+G_y'\cdot y'(x)+G_z'\cdot z'(x)=0. \end{cases}$$

由此求出隐函数 $y(x)$, $z(x)$的导数为

$$y'(x)=-\frac{\begin{vmatrix} F_x' & F_z' \\ G_x' & G_z' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}},\quad z'(x)=-\frac{\begin{vmatrix} F_y' & F_x' \\ G_y' & G_x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y' & F_z' \\ G_y' & G_z' \end{vmatrix}}.$$

如果不怕麻烦,不难求出隐函数 $y(x)$与 $z(x)$的二阶导数.

例 给定曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$,则由曲线的切线 $x=x(t)+x'(t)s$, $y=y(t)+y'(t)s$, $z=z(t)+z'(t)s$ 形成的曲面 $z=z(x,\ y)$满足方程：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

解 题意蕴涵 s, t 可以确定为 x, y 的隐函数,我们用微分来求复合函数 $z=z(x,\ y)$的偏导数. 由于

$$\begin{aligned} dz &= z'(t)dt+z''(t)dt\cdot s+z'(t)ds \\ &=(z'+sz'')dt+z'ds, \end{aligned}$$

所以

$$d^2z=(z''+sz''')dt^2+2z''dtds+(z'+sz'')d^2t+z'd^2s. \quad ①$$

再由对称性和 $d^2x=0$, $d^2y=0$,得

$$\begin{cases}0=(x''+sx''')dt^2+2x''dtds+(x'+sx'')d^2t+x'd^2s,\\0=(y''+sy''')dt^2+2y''dtds+(y'+sy'')d^2t+y'd^2s.\end{cases}\quad ②$$

从②解出 d^2t, d^2s 代入①,相当于把①,②看成联立方程组解 d^2z, d^2t, d^2s,故得

$$d^2z\begin{vmatrix}1 & z'+sz'' & z'\\0 & x'+sx'' & x'\\0 & y'+sy'' & y'\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}(z''+sz''')dt^2+2z''dtds & z'+sz'' & z'\\(x''+sx''')dt^2+2x''dtds & x'+sx'' & x'\\(y''+sy''')dt^2+2y''dtds & y'+sy'' & y'\end{vmatrix}.$$

利用行列式性质将上式化简,得

$$sd^2z\begin{vmatrix}1 & z'' & z'\\0 & x'' & x'\\0 & y'' & y'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z''' & z'' & z'\\x''' & x'' & x'\\y''' & y'' & y'\end{vmatrix}s^2dt^2.\quad ③$$

记

$$\Delta=\begin{vmatrix}x'' & x'\\y'' & y'\end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix}z''' & z'' & z'\\x''' & x'' & x'\\y''' & y'' & y'\end{vmatrix},$$

③式可记成:

$$d^2z=\frac{Ds\,dt^2}{\Delta}.$$

将 $dt=\frac{\partial t}{\partial x}dx+\frac{\partial t}{\partial y}dy$ 代入上式,并与 $d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$ 比较,得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{Ds}{\Delta}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{Ds}{\Delta}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{Ds}{\Delta}\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2,$$

由此推出

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求由方程组 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ 所确定的函数 $z=z(x, y)$的一阶、二阶偏导数.

2. 由下列方程组求 y', z', y'', z'':

(1) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=6. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ 2x^2+2y^2-z=0. \end{cases}$

3. 求下列变换的 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.

(1) $\begin{cases} u=xy, \\ v=\dfrac{x}{y}. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} u=x^2+y^2, \\ v=2xy. \end{cases}$

§ 5 曲线的切线、曲面的切平面

5.1 由参数方程表示的曲线和曲面

若空间连续曲线由参数方程

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t)$$

给定,求过曲线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的切线方程和切向量,其中 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$. 这里函数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$在 $t=t_0$ 点可导,且 $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)\neq 0$.

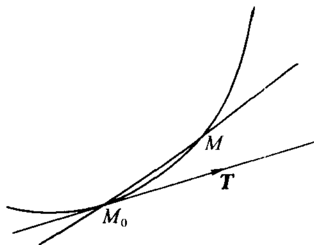


图 14-3

为此考察曲线上一动点 $M(x(t), y(t), z(t))$,过 M, M_0 的割线方程为(图 14-3):

$$\frac{x-x_0}{x(t)-x(t_0)}=\frac{y-y_0}{y(t)-y(t_0)}=\frac{z-z_0}{z(t)-z(t_0)}.$$

上式分母同除以 $t-t_0$,然后令 $t\to t_0$,由于切线即为割线的极限位置,所以所求的切线方程为:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

曲线在 M_0 点的切向量为：

$$T = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)).$$

由此得出曲线在 M_0 点的法平面为：

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0.$$

现在来求由参数方程

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D$$

给出的曲面在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$点的切平面与法向量，其中 $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$. 这里函数 $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$在(u_0, v_0)点可微，且满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)} = 2$$

为此考察曲面上过 M_0 点的两条曲线：

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0), \\ z = z(u, v_0), \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v), \\ z = z(u_0, v). \end{cases}$$

这两条曲线在 M_0 点的切向量分别为：

$$\boldsymbol{T}_u = (x_u'(u_0, v_0), y_u'(u_0, v_0), z_u'(u_0, v_0))$$

和

$$\boldsymbol{T}_v = (x_v'(u_0, v_0), y_v'(u_0, v_0), z_v'(u_0, v_0)).$$

所以曲面在 M_0 点的法向量 $\boldsymbol{N}$(图 14-4)为：

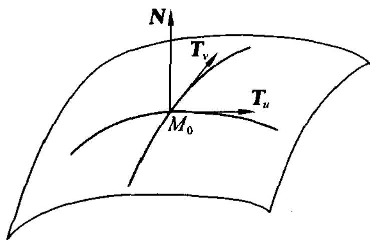


图 14-4

$$N = T_u \times T_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}_{M_0}$$

若记

$$A = \left.\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}, \quad B = \left.\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0}, \quad C = \left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right|_{M_0},$$

则曲面在 M_0 点的法向量为:

$$N = (A, B, C).$$

过 M_0 点的切平面为:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

过 M_0 点的法线方程为:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 给定曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$,证明它到原点的距离$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}$为常数,当且仅当位移向量$(x(t), y(t), z(t))$与切向量$(x'(t), y'(t), z'(t))$的内积为零.

2. 若曲线在每一点处的法平面都经过一个定点,证明该曲线必是一条球面曲线.

5.2 由隐函数表示的曲面和曲线

设曲面由方程

$$F(x, y, z) = 0$$

给出,$M_0(x_0, y_0, z_0)$为曲面上一点,即 $F(x_0, y_0, z_0)=0$,求曲面在 M_0 点的切平面方程与 M_0 点的法向量. 这里函数 $F(x, y, z)$在 M_0 点可微,且矩阵(F_x', F_y', F_z')在 M_0 的秩为 1.

为此在曲面上任作一过 M_0 点的光滑曲线: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$,满足 $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$和

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0,$$

上式对 t 求导,得

$$F'_x \cdot x'(t) + F'_y \cdot y'(t) + F'_z \cdot z'(t) = 0,$$

用 $t=t_0$ 代入,得

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)x'(t_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)y'(t_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)z'(t_0) = 0,$$

上式表明曲线在 M_0 点的切向量 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 与向量

$$\boldsymbol{N} = (F'_x, F'_y, F'_z)_{M_0}$$

正交(图 14-5),由于曲面上过 M_0 点的曲线是任意的,所以向量 $\boldsymbol{N}$ 即为曲面在 M_0 点的法向量. 曲面在 M_0 点的切平面为

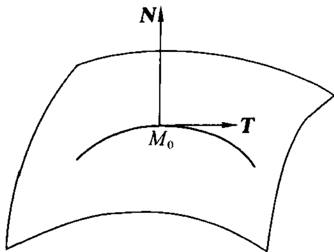


图 14-5

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0,$$

曲面过 M_0 点的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

若曲面由显方程 $z=f(x, y)$ 给出,把它看成是方程 $z-f(x, y)=0$ 确定的隐函数,所以曲面上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的法向量为

$$\boldsymbol{N} = (-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1).$$

切平面方程为

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y-y_0).$$

特别当 $n=2$ 时,即得曲线 $F(x, y)=0$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 点的法向

量$(F_x'(x_0, y_0), F_y'(x_0, y_0))$.

现讨论曲线由方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

给出,即曲线为两曲面 S_1 与 S_2 的交线,求曲线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的切向量与切线方程,其中 M_0 满足 $F_1(x_0, y_0, z_0)=0$, $F_2(x_0, y_0, z_0)=0$. 这里函数 $F_i(x, y, z)(i=1, 2)$在 M_0 点可微,且满足

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{M_0} = 2.$$

已知向量

$$\boldsymbol{N}_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x}, \frac{\partial F_i}{\partial y}, \frac{\partial F_i}{\partial z}\right)_{M_0}$$

为曲面 $S_i(i=1, 2)$在 M_0 点的法向量,曲线在 M_0 点的切向量 $\boldsymbol{T}$ 应与 $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ 正交(图 14-6),所以

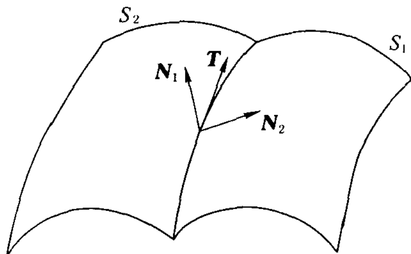


图 14-6

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{N}_1 \times \boldsymbol{N}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{M_0}$$

记

$$A=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0},\ B=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_{M_0},$$

$$C=\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_{M_0},$$

则切向量为

$$\boldsymbol{T}=(A,B,C),$$

切线方程为

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

法平面方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

例 1 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$点的切平面方程.

解 因 M_0 点的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right),$$

所以切平面方程为

$$\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

注意到 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$,上式化简得

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

例 2 给定曲面 $F\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$ (a,b,c 为常数),求证曲面的切平面过一定点.

解 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面上一点,该点的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\left(F_1'\cdot\frac{1}{z-c},F_2'\cdot\frac{1}{z-c},F_1'\left(-\frac{x-a}{(z-c)^2}\right)\right.$$

$$\left.\left.+F_2'\left(-\frac{y-b}{(z-c)^2}\right)\right)\right|_{M_0},$$

所以切平面方程为

$$\frac{x-x_0}{z_0-c}F_1'\Big|_{M_0}+\frac{y-y_0}{z_0-c}F_2'\Big|_{M_0}-\left[\frac{x_0-a}{(z_0-c)^2}F_1'\Big|_{M_0}\right.$$
$$\left.+\frac{y_0-b}{(z_0-c)^2}F_2'\Big|_{M_0}\right](z-z_0)=0.$$

当方程中 x, y, z 用 a, b, c 代入时等式成立,故曲面各点的切平面都过一定点(a, b, c).

思考练习 解答下列问题:

1. 求曲线 $z=x^2+y^2$, $2x^2+2y^2-z^2=0$ 在点$(1, 1, 2)$处的切线方程.

2. 求下列曲面在指定点的切平面和法线方程:

(1) $x^2+y^2+z^2=169$, $M(3, 4, 12)$.

(2) $z=\arctan\dfrac{x}{y}$, $M\left(1, 1, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. 求曲面 $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$ 在点 $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的切平面.

4. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面.

5. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=x$ 的切平面,使其垂直于平面$x-y-z=2$ 和 $x-y-\dfrac{z}{2}=2$.

6. 确定正数 λ,使曲面 $xyz=\lambda$ 与椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在某点相切.

7. 给定方程 $\dfrac{x^2}{a-t}+\dfrac{y^2}{b-t}+\dfrac{z^2}{c-t}=1$ $(a>b>c)$以及第一象限中一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$,证明

(1) 有三个不同值 t_1, t_2, t_3,使曲面

$$\frac{x^2}{a-t_i}+\frac{y^2}{b-t_i}+\frac{z^2}{c-t_i}=1\quad(i=1, 2, 3).$$

(2) 此三曲面在点 M_0 处两两正交.

8. 证明曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$的切平面在坐标轴上截下的诸线段长之和为一常量.

9. 证明曲面 $F(x-az, y-bz)=0$ 的切平面与某一定直线平行(a, b 为常数).

10. 证明曲面 $ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2)$在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的法向量与向量(x_0, y_0, z_0)和(a, b, c)共面.

11. 若一曲面 $z=f(x, y)$的所有法线与 z 轴相交,证明该曲面是一旋转曲面.

12. 设 $f(x, y)$满足 $f_x'+ff_y'\equiv 0$,问函数 $z=f(x, y)$的等位线有何特征.

13. 设 $z=f(x, y)$在每点(x, y, z)的切平面过定点(a, b, c),证明函数是关于(a, b, c)点的一次齐次函数: $f[t(x-a)+a, t(y-b)+b]=t[f(x, y)-c]$.

14. 如果从点 P 能引二次曲面 $ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fxz+gx+hy+iz+j=0$ (a, b, c, d, e, f, g, h, i, j 为常数)的切线,证明切点共面.

§6 方向导数和梯度

6.1 多元函数的方向导数

设 $f(x, y, z)$在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$的邻域内定义, $\boldsymbol{l}$ 为一单位向量,设 $\boldsymbol{l}$ 与 x, y, z 轴正向的夹角分别为α, β, γ($0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant\gamma\leqslant\pi$),则 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

过 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的直线方程 L 为:

$$x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,\ z=z_0+t\cos\gamma.$$

将函数限制在直线 L 上,它是 $t=0$ 邻域上的一元函数,此函数在 $t=0$ 的导数就称为 $f(x, y, z)$在 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数.

定义 14.3 若极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{t}$$

存在,则称它为函数 $f(x,\ y,\ z)$ 在 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 方向的**方向导数**或**变化率**,记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$ 或 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}$.

注 定义从字面上看似乎依赖于坐标系的选取,但把定义改写成

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{\overrightarrow{M_0M}\cdot \boldsymbol{l}}$$

形式,这里函数在动点的值 $f(M)$ 和定点值 $f(M_0)$ 与坐标系选取无关,向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{l}$ 点乘也与坐标系选取无关,所以方向导数概念与坐标系的选取无关. 正如曲线的长度是曲线的固有性质,它与坐标系选取无关,但在求曲线的长度时,我们总是在取定的坐标系中讨论.

定理 14.4 设 $f(x,\ y,\ z)$ 在 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 点可微,则它沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ 方向的方向导数存在,且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f(x_0,\ y_0,\ z_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

证明 因函数在 M_0 点可微所以可应用复合函数求偏导公式,得

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\gamma.$$ 证毕.

关于方向导数作几点说明:

(1) 若 $\boldsymbol{l}^-$ 表示 $\boldsymbol{l}$ 的相反方向,即 $\boldsymbol{l}^-=(-\cos\alpha,\ -\cos\beta,\ -\cos\gamma)$,则 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}^-}=-\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$.

(2) 设区域 D 由光滑闭曲面围成, $f\in C^{(1)}(\overline{D})$,这时在 D 的内点定理 14.4 的结论成立,通过取极限,认为在 D 的边界点定理 14.4 的结论也成立. 由于边界是光滑的,它有外法线方向

$\boldsymbol{n}$,函数在边界点沿外法线方向的方向导数约定为:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}=-\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}^{-}}.$$

(3) 对二元函数 $f(x, y)$因方向 $\boldsymbol{l}$ 可表示为:

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta)=(\cos\alpha, \sin\alpha),$$

这里规定 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$,它是由 x 轴正向转到 $\boldsymbol{l}$ 方向转过的角度,或 $-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi$,表示由 x 轴正向转到 $\boldsymbol{l}$ 的角度,逆时针转动时 α 为正,顺时针转动时为负.

所以方向导数公式为:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\sin\alpha.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求 $f(x, y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(x, y)\neq(0, 0)$处沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$方向的方向导数(用极坐标).

2. 设 $f(x, y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$,求它在点$(x, y)(x\neq0)$处沿 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$的方向导数(用极坐标表示).

3. 设 $f(x, y)=x^2-xy+y^2$, $M_0(1, 1)$.

(1) 若方向 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$,求其方向导数.

(2) 试问在什么方向上的方向导数 $\frac{\partial f(1, 1)}{\partial \boldsymbol{l}}$ 取最大值、最小值以及零?

4. 设 $f(x, y)$在$(0, 0)$点沿任一方向的方向导数存在,问定理 14.4 的公式是否成立? 考察例子

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

5. 若定理 14.4 中公式在$(0, 0)$点成立,问函数是否在$(0, 0)$点可微. 考察例子

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^3 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

6.2 多元函数的梯度

方向导数刻画函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率,我们要问函数沿哪个方向它的变化率最大,哪个方向变化率为零,哪个方向变化率最小.要回答这些问题,最好把定理 14.4 的结论写成向量形式.为此令

$$\boldsymbol{g}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0},$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{l}=|\boldsymbol{g}|\cos(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{l}).$$

显然 $\boldsymbol{l}$ 取 $\boldsymbol{g}$ 的方向时,函数的方向导数最大,其值为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=|\boldsymbol{g}|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}\,\Bigg|_{M_0};$$

当 $\boldsymbol{l}$ 与 $\boldsymbol{g}$ 正交时,函数的方向导数为零;当 $\boldsymbol{l}$ 取 $\boldsymbol{g}$ 的相反方向时,函数的方向导数最小.

定义 14.4 设函数 $f(x, y, z)$在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$点可微,称向量 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$ 或 $\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\boldsymbol{k}$ 为函数在 M_0 点的**梯度**,记为

$$\mathrm{grad} f(M_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$$

注 从定义看,梯度似乎依赖于坐标系的选取,但从上面讨论知道,梯度为一向量,它的方向是函数增加最快的方向,它的大小是函数在该方向的变化率,所以梯度与坐标系的选取无关.

由梯度定义,得到方向导数与梯度的联系式

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=|\mathrm{grad} f(M_0)|\cdot\cos(\mathrm{grad} f(M_0), \boldsymbol{l}).$$

这说明梯度在 $\boldsymbol{l}$ 方向的投影,即为函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数. 所以对另一单位正交向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 组成的右手系 $(O'; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$,函数在 M_0 点的梯度为:

$$\mathrm{grad} f(M_0) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial e_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial e_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial e_3}\boldsymbol{e}_3.$$

反之,可利用梯度来求方向导数. 为此先画出梯度和负梯度,并以此两向量为直径作两相切于 M_0 点的球面,分别称为正球面和负球面. 过 M_0 以 $\boldsymbol{l}$ 为方向作一射线 L,射线 L 交球面之一于一点 M,若 M 位于正球面上,则 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = d(M, M_0)$;若 M 位于负球面上,则 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = -d(M, M_0)$(图 14-7).

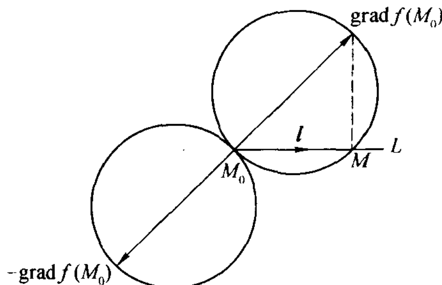


图 14-7

过 M_0 点的等位面为:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0),$$

等位面在 M_0 点的法向量 $\boldsymbol{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0}$ 即为梯度,所以梯度与等位面正交,方向由低值等位面指向高值等位面.

设 u, v 是 x, y, z 的可微函数,则有梯度的运算法则:

(1) $\mathrm{grad}(u \pm v) = \mathrm{grad}u \pm \mathrm{grad}v$;

(2) $\mathrm{grad}(u \cdot v) = v\,\mathrm{grad}u + u\,\mathrm{grad}v$;

(3) $\mathrm{grad}F(u) = F'(u)\mathrm{grad}u$(函数 $F(u)$ 可微).

例 设在空间的原点处放置单位正电荷,则空间各点有电位

$$u(x, y, z) = \frac{1}{r},$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,求 grad$u$.

解 因

$$\mathrm{grad}r = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

所以

$$\mathrm{grad}u = -\frac{1}{r^2}\mathrm{grad}r = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

注 已知电场强度 $\boldsymbol{E}(x, y, z)=-\mathrm{grad}u(x, y, z)$,所以单位正电荷形成的电场强度 $\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$. 若曲线每点的切线方向都是场强方向,则此曲线称为电场 $\boldsymbol{E}$ 的电力线. 电场 $\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 的电力线是从原点出发的射线,它与电位的等位面正交.

思考练习 解答下列问题:

1. 求函数 $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 的梯度. 问在何处此梯度垂直于 z 轴? 平行于 z 轴? 为零向量?

2. 求 $u=x(x^2+y^2+z^2)^{-1}$ 在点 $M(1, 2, 2)$ 与点 $N(-3, 1, 0)$ 处两梯度之间的夹角.

3. 设 $f(x, y)$ 在区域 D 上可微,给定两个方向 $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$,它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$,证明

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2},$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sin\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}\right)^2}.$$

4. 设函数在柱坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ 下的表示式为 $u=f(r, \theta, z)$,在 $M(x, y, z)$ 点作三个两两正交的单位向量 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$(向量 $\boldsymbol{e}_r$ 表示固定 θ, z,沿 r 增加的方向; $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$ 作类似理解),得右手系 $(M: \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$. 先求出单位向量 $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\theta$, $\boldsymbol{e}_z$,然后证明

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

5. 设函数在球坐标:

$$x=r\sin\varphi\cdot\cos\theta,\ y=r\sin\varphi\cdot\sin\theta,\ z=r\cos\varphi$$

下的表示式为 $u=f(r,\theta,\varphi)$,在 $M(x,y,z)$点处作三个两两正交的单位向量: $\boldsymbol{e}_r$, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$($\boldsymbol{e}_r$ 表示固定 φ, θ,沿 r 增加的方向, $\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_\theta$ 作类似理解)并证明

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

6. 设 $f(x,y)$在每点的梯度方向与向量(x,y)相同,证明 $f(x,y)=g(x^2+y^2)$.

7. 设 $f(x,y,z)$在每点的梯度方向与向量(x,y,z)相同,证明 $f(x,y,z)=g(x^2+y^2+z^2)$.

§7 Taylor 公式、凸函数

7.1 多元函数的 Taylor 公式

微分是用一次函数来逼近一般函数,若嫌一次逼近精度不够,就要用高次多项式来逼近一般函数. Taylor 公式就是用高次多项式来逼近一般函数的一种方法.

定理 14.5 设 D 是平面凸域, $f(x,y)\in C^{(n+1)}(D)$, $(x_0,y_0)\in D$,则对 D 内任意点$(x_0+h,y_0+k)\in D$,成立

$$\begin{aligned}&f(x_0+h,y_0+k)\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)\\&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\\&\quad(0<\theta<1).\end{aligned}\qquad ①$$

这里记号$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$理解为算子 $h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}$ 连续 m 次作用到函数 $f(x,y)$,得

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x,y)=\sum_{r=0}^{m}C_m^r h^{m-r}k^r\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^{m-r}\partial y^r},$$

然后再用 $x=x_0$, $y=y_0$ 代入. 公式①中余项也作同样理解.

证明 考虑一元函数

$$\varphi(t)=f(x_0+th,\ y_0+tk)\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

显然有 $\varphi(0)=f(x_0,y_0)$, $\varphi(1)=f(x_0+h,y_0+k)$. 对一元函数 $\varphi(t)$应用 Taylor 公式,得

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$$
$$+\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\quad(0<\theta<1).\qquad ②$$

再由复合函数求导公式得

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+th,\ y_0+tk),$$

$$\varphi''(t)=\frac{\partial f}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0+th,\ y_0+tk),$$

一般地,

$$\varphi^{(m)}(t)=\sum_{r=0}^{m}C_m^r h^{m-r}k^r\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-r}\partial y^r}$$
$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+th,\ y_0+tk)$$
$$(m=1,2,\cdots,n+1).$$

把上式代入②式,即得①式. 证毕.

设 $U((x_0,y_0))$表示点(x_0,y_0)的一个邻域,我们有局部的 Taylor 公式,也称带有 Peano 余项的 Taylor 公式.

定理 14.6 设 $f(x,y)\in C^{(n)}(U)$,则

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,y_0)$$
$$+o(\rho^n),$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

证明 由定理 14.5 得

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,\ y_0)$$
$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$
$$(0<\theta<1)$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0,\ y_0)+R_n,$$

这里

$$R_n=\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)$$
$$-\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,\ y_0).$$

因 $f(x,\ y)$的所有 n 阶偏导数在邻域 U 上连续,所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{R_n}{\rho^n}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{n!}\sum_{r=0}^{n}C_n^r\left(\frac{h}{\rho}\right)^{n-r}\left(\frac{k}{\rho}\right)^r\left[\frac{\partial^n f(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-r}\partial y^r}\right]=0,$$

即 $R_n=o(\rho^n)$. 证毕.

定理 14.5 中当 $n=0$ 时,即得凸域上的微分中值定理:

$$f(x_0+h,\ y_0+k)-f(x_0,\ y_0)=f'_x(x_0+\theta h,\ y_0+\theta h)h$$
$$+f'_y(x_0+\theta h,\ y_0+\theta k)k.$$

定理 14.6 中当 $n=2$ 时,有

$$f(x_0+h,\ y_0+k)=f(x_0,\ y_0)+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}h+\frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}k$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}h^2+2\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x\partial y}hk\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial y^2}k^2\right]+o(\rho^2).$$

定义 $f(x,\ y)$在$(x_0,\ y_0)$点的 **Hesse**① **矩阵**为

① 海塞(1811~1874).

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

则公式可写成如下形式:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)\binom{h}{k}$$
$$+\frac{1}{2}(h\ k)H_f(x_0, y_0)\binom{h}{k} + o(\rho^2).$$

例 将函数 $\dfrac{x}{y}$ 在(1, 1)点展开带有 Peano 余项的 Taylor 公式至三次项.

解
$$\frac{x}{y} = \frac{1+(x-1)}{1+(y-1)} = [1+(x-1)][1-(y-1)$$
$$+(y-1)^2-(y-1)^3+o((y-1)^3)]$$
$$=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)$$
$$+(y-1)^2+(x-1)(y-1)^2-(y-1)^3+o(\rho^3).$$

这里 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, $o((y-1)^3)=o(\rho^3)$, $(x-1)(y-1)^3=o(\rho^3)$.

思考练习 解答下列问题:

1. 在点(1, −2)处把函数

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

展成 Taylor 公式.

2. 在点(x_0, y_0)处把函数

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

展成 Taylor 公式.

3. 把下列函数在点(0, 0)处展成 Taylor 公式到第四次项:

(1) $f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

(2) $f(x, y)=\dfrac{\cos x}{\cos y}$.

(3) $f(x, y)=\arctan\left(\dfrac{1+x+y}{1-x+y}\right)$.

(4) $f(x, y)=\ln(1-x)\cdot\ln(1-y)$.

4. 设 D 为包含原点的凸区域,又 $f(x, y)\in C^{(1)}(D)$,且满足

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0.$$

试证明 $f(x, y)$ 在 D 上为一常数.若 D 是不含原点的区域,在上述条件下,试问 $f(x, y)$ 是否为一常数?

5. D 为凸域, $(x_0, y_0)\in D$,函数 $f\in C^{\infty}(D)$,且有常数 $M>0$,在 D 上 f 满足:

$$\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\right|\leqslant M^n,\ (k=0,1,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots).$$

则在 D 上 $f(x, y)$ 可展成二元 Taylor 级数:

$$f(x_0+h, y_0+k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0).$$

6. 二元幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}a_{nm}x^n y^m$ 的收敛域定义为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}|a_{nm}|\,|x|^n\,|y|^m$ 的收敛域(保证求和与次序无关).试画出下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}x^n y^m$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{n}{m!}x^n y^m$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n y^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{1}{n}C_n^m x^{n-m}y^m$.

7.2 凸函数

定义 14.5 设 D 是平面凸域, $f(x, y)$ 在 D 上定义.若对 D 上任意两点 (x_1, y_1), (x_2, y_2),函数满足

$$f[tx_1+(1-t)x_2,\ ty_1+(1-t)y_2]$$
$$\leqslant tf(x_1, y_1)+(1-t)f(x_2, y_2)\quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

则称 $f(x, y)$ 是凸域 D 上的**凸函数**.

定理 14.7 设 D 是平面凸域, $f(x, y)\in C^{(2)}(D)$,则下列

命题等价.

(1) $f(x, y)$是 D 上的凸函数;

(2) $\forall (x_0, y_0)\in D$,有

$$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)$$
$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0),$$

$\forall (x, y)\in D$;

(3) $\forall (x_0, y_0)\in D$,Hesse 矩阵 $H_f(x_0, y_0)$半正定.

证明 (1) $\Rightarrow$(2). 由凸函数定义知

$$f[tx+(1-t)x_0, ty+(1-t)y_0]$$
$$\leqslant tf(x, y)+(1-t)f(x_0, y_0), \qquad ①$$

上式左端利用微分定义得

$$f[tx+(1-t)x_0, ty+(1-t)y_0]$$
$$=f[x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0)]$$
$$=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}t(x-x_0)$$
$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}t(y-y_0)+o(t\rho),$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$.

把上式代入①式,并消去 $f(x_0, y_0)$,得

$$t\left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right]+o(t\rho)$$
$$\leqslant t[f(x, y)-f(x_0, y_0)],$$

上式除以 t,然后令 $t\to 0$,因$\lim\limits_{t\to 0}\frac{o(t\rho)}{t}=0$($\rho$ 视作常数),即得

$$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x-x_0)$$
$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y-y_0).$$

(2) $\Rightarrow$(3). 任取$(x_0, y_0)\in D$ 和$(x, y)\in \mathbf{R}^2$,当 t 充分小

时,点$(x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0))\in D$,应用本章7.1节公式③得

$$f[x_0+t(x-x_0), y_0+t(y-y_0)]$$
$$=f(x_0, y_0)+t\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$$
$$+\frac{t^2}{2}(x-x_0 \quad y-y_0)H_f(x_0, y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+o(t^2\rho),$$

其中$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_2)^2}$.

由(2)的假设推出

$$\frac{t^2}{2}(x-x_0 \quad y-y_0)H_f(x_0, y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}+o(t^2\rho)\geqslant 0,$$

上式除以t^2,然后令$t\to 0$,即得

$$\frac{1}{2}(x-x_0 \quad y-y_0)H_f(x_0, y_0)\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\geqslant 0.$$

这表明矩阵$H_f(x_0, y_0)$是半正定的,再由(x_0, y_0)的任意性,矩阵$H_f(x, y)$在D上是半正定的.

(3)⇒(1). 任取两点(x_1, y_1), $(x_2, y_2)\in D$,令

$$x_0=tx_1+(1-t)x_2, \quad y_0=ty_1+(1-t)y_2.$$

由定理14.5得

$$f(x_1, y_1)=f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_1-x_0)$$
$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_1-y_0)$$
$$\frac{1}{2}(x_1-x_0 \quad y_1-y_0)H_f(x_0+\theta(x_1-x_0),$$
$$y_0+\theta(y_1-y_0))\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}$$

$(0<\theta<1)$,再由(3)的假设,推出

$$f(x_1, y_1)\geqslant f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_1-x_0)$$

$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_1-y_0). \qquad ②$$

同理有

$$f(x_2, y_2)\geqslant f(x_0, y_0)+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_2-x_0)$$

$$+\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_2-y_0). \qquad ③$$

②$\times t+$③$\times(1-t)$,得

$$\begin{aligned}&tf(x_1, y_1)+(1-t)f(x_2, y_2)\\ \geqslant &f(x_0, y_0)\\ =&f[tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2].\end{aligned}$$

证毕.

例 求证 $f(x, y)=e^{x^2+y^2}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的凸函数.

证明 先求出函数的 Hesse 矩阵

$$H_f((x, y))=\begin{pmatrix}(2+4x^2)e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2}\\ 4xye^{x^2+y^2} & (2+4y^2)e^{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$

因 $(2+4x^2)e^{x^2+y^2}>0$ 和 $\det H_f((x, y))=(4+8x^2+8y^2)e^{2(x^2+y^2)}>0$,所以 Hesse 矩阵是正定的,由定理 14.7 知函数为凸函数.

思考练习 解答下列问题:

1. 试证明函数

(1) $f(x, y)=x^2+y^2$; (2) $f(x, y)=e^{x+y}$.

是全平面上的凸函数.

2. D 为凸域, $f: D\to\mathbf{R}$ 为凸函数,证明: $\forall\alpha\in\mathbf{R}$,水平集 $\Gamma_\alpha=\{(x, y)\in D\mid f(x, y)\leqslant\alpha\}$ 为凸集.

3. D 为凸域, $f: D\to\mathbf{R}$ 称为**拟凸函数**,若对 $\forall(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)\in D$, $\forall\lambda\in(0, 1)$,有

$$\begin{aligned}&f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\\ \leqslant&\max\{f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)\}.\end{aligned}$$

证明 f 是拟凸函数,充分必要条件是水平集

$$\Gamma_\alpha = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) \leqslant \alpha, \alpha \in \mathbf{R}\}$$

为凸集.

§8 向量函数的可微性

8.1 线性变换

讲述向量函数微分时,要用到线性算子概念,所以有必要先来探讨线性算子的性质.

定义 14.6 若映射 $\boldsymbol{A}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 满足: $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$,有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2)$, $\boldsymbol{A}(c\boldsymbol{x}) = c\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**线性算子**. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$常记作 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

显然 $\boldsymbol{A}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 对线性算子只要知道它在一组基的值,该线性算子就完全确定. 事实上,设$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$是 $\mathbf{R}^n$ 的基,已知 $\boldsymbol{A}$ 作用在基上的像为$\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}$,则 $\forall \boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{x}_j \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_j$.

$\boldsymbol{A}$ 的值域$R(\boldsymbol{A})$是 $\mathbf{R}^m$ 的线性子空间, $R(\boldsymbol{A})$的维数称为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**,记作 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}$. 若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = k$,充要条件是向量组$\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}$的最大线性无关组的个数为 k.

称集合 $N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$为 $\boldsymbol{A}$ 的**零空间**,显然它是 $\mathbf{R}^n$ 的线性子空间, $\boldsymbol{A}$ 为单射的充要条件是 $N(\boldsymbol{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

记所有线性算子 $\boldsymbol{A}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 全体为$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. 若 $n = m$,称 $\boldsymbol{A}$ 为**线性变换**,其全体记作 $L(\mathbf{R}^n)$. 若 $\boldsymbol{A}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是双射,则由 $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n)$确定$\boldsymbol{A}$ 的逆变换 $\boldsymbol{A}^{-1}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. 显然 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是线性变换.

定理 14.8 $\boldsymbol{A} \in L(\mathbf{R}^n)$是单射,当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 是满射.

证明 设 $R(\boldsymbol{A}) = \mathbf{R}^n$. 任取 $\mathbf{R}^n$ 的一组基$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$,由 $\boldsymbol{A}$ 满射知向量组 $Q = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n\}$线性无关. $\forall \boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$ 且 $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{x}_j$, 可得

$$Ax = A\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j A x_j = \mathbf{0}.$$

再由 Q 是无关组,推出 $c_j = 0\ (1 \leqslant j \leqslant n)$,即得 $x = \mathbf{0}$ 或 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$,这说明 A 是单射.

反之,设 $N(A) = \{\mathbf{0}\}$. 由 $\sum_{j=1}^{n} c_j A x_j = \mathbf{0}$,可推出 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mathbf{0}$,进而推出 $c_j = 0\ (1 \leqslant j \leqslant n)$,这说明向量组 Q 线性无关,所以 A 是满射. 证毕.

定义 14.7 (1) 设 $A_1, A_2 \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$,定义 $c_1A_1 + c_2A_2$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 为: $(c_1A_1 + c_2A_2)x = c_1A_1x + c_2A_2x$. 容易验证 $c_1A_1 + c_2A_2 \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, 说明 $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$也是线性空间.

(2) 设 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $B \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$,将 A 与 B 的复合 $(BA)x = B(Ax)$定义为它们的**乘积**, $BA \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$,当 $n = m = p$ 时,这时 BA 与 AB 均有意义,但不必相同.

(3) 设 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,定义 A 的**范数** $\|A\|$ 为:

$$\|A\| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax| = \sup_{|x| = 1} |Ax|.$$

利用 A 的线性性,对任意 $x \in \mathbf{R}^n$,有

$$|Ax| \leqslant \|A\|\ |x|;$$

若存在 λ,对任意 $x \in \mathbf{R}^n$,有 $|Ax| \leqslant \lambda |x|$,则 $\|A\| \leqslant \lambda$.

注 范数有一几何解释. 设线性算子 A 的秩为 k,算子 A 把 $\mathbf{R}^n$ 中单位球 $|x| \leqslant 1$ 映为 $\mathbf{R}^m$ 中 k 维椭球, $\|A\|$ 即为这个 k 维椭球的最大长半轴.

定理 14.9 (1) 若 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,则 $\|A\| < +\infty$,且 A 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$ 的一致连续映射;

(2) 若 $A, B \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $c \in \mathbf{R}$,则

$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|cA\| = |c|\ \|A\|.$$

定义 $\|A - B\|$ 为 A, B 间的**距离**: $d(A, B) = \|A - B\|$,则 $L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$为一**距离空间**;

(3) 若 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $B \in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$,则

$$\| \boldsymbol{BA} \| \leqslant \| \boldsymbol{B} \| \| \boldsymbol{A} \| .$$

证明 证(1). 设$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$为$\mathbf{R}^n$的标准基, $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{e}_j$, $|\boldsymbol{x}| = \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 于是有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{Ax}| &= \left|\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{Ae}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |c_j| |\boldsymbol{Ae}_j| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{Ae}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{Ae}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} |\boldsymbol{x}|, \end{aligned}$$

所以

$$\| \boldsymbol{A} \| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{Ae}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \qquad ①$$

故当$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$时, $|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Ay}| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$,由此即可看出映射$\boldsymbol{A}$一致连续.

证(2). 因$|(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bx}| \leqslant |\boldsymbol{Ax}| + |\boldsymbol{Bx}| \leqslant (\| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|)|\boldsymbol{x}|$,所以$\| \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \| \leqslant \| \boldsymbol{A} \| + \| \boldsymbol{B} \|$. 同理可证$\| c\boldsymbol{A} \| = |c| \| \boldsymbol{A} \|$.

若$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,则

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{A} - \boldsymbol{C} \| &= \| (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) \| \\ &\leqslant \| \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \| + \| \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} \|, \end{aligned}$$

这表明$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$为一距离空间(另两条件$\| \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \| = 0$,当且仅当$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$,和$\| \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \| = \| \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \|$显然满足).

证(3). 因$|\boldsymbol{BAx}| \leqslant \| \boldsymbol{B} \| |\boldsymbol{Ax}| \leqslant \| \boldsymbol{B} \| \| \boldsymbol{A} \| |\boldsymbol{x}|$,所以

$$\| \boldsymbol{BA} \| \leqslant \| \boldsymbol{B} \| \| \boldsymbol{A} \| .$$ 证毕.

对距离空间$L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,我们可以引入邻域,集合的内点、聚点,开集,闭集和连续等概念.

定理 14.10 设$\Omega \subset L(\mathbf{R}^n)$为所有可逆线性变换的集合,则

(1) $\boldsymbol{A} \in \Omega$,当且仅当$|\boldsymbol{Ax}| \geqslant \lambda |\boldsymbol{x}|$ $(\lambda > 0)$;

(2) 设$\boldsymbol{A} \in \Omega$, $\boldsymbol{B} \in L(\mathbf{R}^n)$,而且$\| \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \| \| \boldsymbol{A}^{-1} \| < 1$,则$\boldsymbol{B} \in \Omega$;

(3) 映射$\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}^{-1}$在$\Omega$上连续.

证明 证(1). 若 A 可逆,则 $|x| = |A^{-1}(Ax)| \leqslant \|A^{-1}\| |Ax|$,所以 $|Ax| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}|x|$. 反之,若 $|Ax| \geqslant \lambda |x|$,推出 A 为单射,由定理 14.8 知 A 可逆. 式中 x 用 $A^{-1}y$ 代入,可得 $\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\lambda}$.

证(2). 令 $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\alpha}$, $\|B-A\| = \beta$,条件即为 $\beta < \alpha$. 因

$|Bx| \geqslant |Ax| - |(A-B)x| \geqslant |Ax| - \|A-B\| |x| \geqslant \frac{1}{\|A^{-1}\|}|x| - \|A-B\| |x| = (\alpha-\beta)|x|$,所以 B 可逆,且 $\|B^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\alpha-\beta}$.

证(3). 由恒等式 $B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1}$,得

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \|B^{-1}\| \|A-B\| \|A^{-1}\| \leqslant \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}.$$

当 $B \to A$ 时,有 $\beta \to 0$,也就有 $B^{-1} \to A^{-1}$,所以映射 $A \mapsto A^{-1}$ 连续. 证毕.

上面的讨论与基无关,即使用到基,其结果不依赖于基的选取. 但讨论线性算子表示时,其结果将依赖于基的选取. 设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和 $\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ 分别表示 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的基. 对于每个 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 由

$$Ax_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

确定一组数 a_{ij},将其写成 $m \times n$ 矩阵,记作

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

矩阵$[A]$的第 j 列为 Ax_j 的坐标,所以矩阵每列称为列向量, A 的值域是由列向量生成. 不同的 A 对应的矩阵$[A]$也不同. 反之,给定 $m \times n$ 矩阵$[A]$,可以定义一线性算子 $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,

所以 $A\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 与 $m\times n$ 矩阵间可建立一一对应,需注意的是这个对应依赖于基的选取.

我们采用矩阵运算记法,有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n] &= [\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n]\\ &=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m][\boldsymbol{A}].\end{aligned} \tag{②}$$

若 $\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{x}_j$,可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m][\boldsymbol{A}]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}$$

又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 直接在 $\mathbf{R}^m$ 中分解式设为:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},\quad 则\quad \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}=[\boldsymbol{A}]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix}.$$

这给出线性算子在取定基下的计算公式.

可以证明若 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,则 $[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{A}]+[\boldsymbol{B}]$, $[\lambda\boldsymbol{A}]=\lambda[\boldsymbol{A}]$,若 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\boldsymbol{B}\in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$,则 $[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]$. 我们来说明后一等式. 设 $\{\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_p\}$ 为 $\mathbf{R}^p$ 的基, $\boldsymbol{B}\in L(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ 对应的矩阵为 $p\times m$ 矩阵 $[\boldsymbol{B}]$,则

$$[\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_m]=[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_p][\boldsymbol{B}]. \tag{③}$$

设 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ 对应的是 $p\times n$ 矩阵 $[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}]$,则

$$[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n]=[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_p][\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}].$$

将 $\boldsymbol{B}$ 作用到②式,然后应用③可得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_n] &= [\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_m][\boldsymbol{A}]\\ &=[\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_p][\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}].\end{aligned}$$

比较上两式,即得 $[\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]$. 特别当 $n=m=p$,且取定相同基时, $\boldsymbol{A}$ 为可逆变换, $\boldsymbol{I}$ 表示恒等变换,则 $[\boldsymbol{A}^{-1}][\boldsymbol{A}]=[\boldsymbol{I}]$,即得 $[\boldsymbol{A}^{-1}]=[\boldsymbol{A}]^{-1}$.

利用线性算子的矩阵表示,我们可以给出范数的估计式.设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 的标准基, $\boldsymbol{A} \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 对应的 $m\times n$ 矩阵 $[\boldsymbol{A}]=[a_{ij}]$,由①可得

$$\|\boldsymbol{A}\| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

又有 $\|\boldsymbol{A}\| = \sup\limits_{|\boldsymbol{x}|=1} |\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}| \geqslant |\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j| = \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant |a_{ij}|$,所以

$$\max_{i,j}|a_{ij}| \leqslant \|\boldsymbol{A}\| \leqslant \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 14.11 (1) $\boldsymbol{A} \in L(\mathbf{R}^n)$ 可逆的充分必要条件是 $\det[\boldsymbol{A}]\neq 0$;

(2) $\det[\boldsymbol{A}]$ 的值与基的选取无关.

证明 证(1).设 $\boldsymbol{A}$ 可逆,由 $[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{A}^{-1}]=[\boldsymbol{I}]$,得 $\det[\boldsymbol{A}]\cdot\det[\boldsymbol{A}^{-1}]=\det[\boldsymbol{I}]=1$,所以 $\det[\boldsymbol{A}]\neq 0$.反之,若 $\det[\boldsymbol{A}]\neq 0$,则 $[\boldsymbol{A}]$ 的 n 个列向量线性无关,由此可知 $\boldsymbol{A}$ 为满射,根据定理14.8推得 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

证(2).设 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的标准基, $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的另一组基. $\boldsymbol{A}$ 在不同基下对应不同方阵:

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n][\boldsymbol{A}],$$

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n][\boldsymbol{A}]_U.$$

我们来证明这两个方阵 $[\boldsymbol{A}]$, $[\boldsymbol{A}]_U$ 的行列式相等.为此由下式定义线性变换 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

显然变换 $\boldsymbol{B}$ 可逆,且

$$[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n][\boldsymbol{B}].$$

将 $\boldsymbol{A}$ 作用于上式得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n] &= [\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n][\boldsymbol{B}] \\ &= [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n][\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}],\end{aligned}$$

又

$$[\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n] = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n][\boldsymbol{A}]_U$$

$$=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n][\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]_U.$$

比较上两式,得$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{B}][\boldsymbol{A}]_U$,取行列式得

$$\det[\boldsymbol{A}]\det[\boldsymbol{B}] = \det[\boldsymbol{B}]\det[\boldsymbol{A}]_U.$$

因 $\det[\boldsymbol{B}]\neq 0$,可得 $\det[\boldsymbol{A}]=\det[\boldsymbol{A}]_U$. 证毕.

定理说明变换对应的方阵行列式与基的选取无关,所以我们可以谈变换的行列式,并记 $\det\boldsymbol{A}$.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$,证明存在唯一向量 $\boldsymbol{y}\in \mathbf{R}^n$,使 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$,且 $\boldsymbol{A}$ 不为零映射,证明 $N(\boldsymbol{A})$为 $n-1$ 维子空间.

8.2 向量函数的微分概念

设 $D\subset\mathbf{R}^n$, $\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 为区域, $\boldsymbol{f}$: $D\to\Omega$, $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$为一向量函数. 若记 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$,则给定一向量函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,相当于给定 m 个 n 元分量函数:

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (1\leqslant i\leqslant m).$$

向量函数在 D 上连续,等价于 m 个分量函数在 D 上连续.

定义 14.8 给定向量函数 $\boldsymbol{f}$: $D\to\Omega$, $\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}_0\in D$, $\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$,若存在线性算子 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{Ah}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\,|\boldsymbol{h}|, \qquad ①$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\in\mathbf{R}^m$ 满足$\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to 0}|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|=0$,则称 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可导或可微, $\boldsymbol{A}$ 称为$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的导数, $\boldsymbol{Ah}$ 称为$\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的微分,记作

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}.$$

若定义 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}$,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$.

$\boldsymbol{A}$ 也记作 $\mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$,导数也称**全导数**. ①式等价于

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{Ah}|}{|\boldsymbol{h}|}=0,$$

上式分子是 $\mathbf{R}^m$ 空间的模,分母是 $\mathbf{R}^n$ 空间的模. 如果 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$就是

线性算子 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$,上式分子为零,所以 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$.

定理 14.12(微分唯一性) 若

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0\quad(i=1,2),$$

则 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2$.

证明 令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2$,由不等式

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{Bh}|\leqslant&|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{h}|\\&+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{h}|,\end{aligned}$$

得 $\frac{|\boldsymbol{Bh}|}{|\boldsymbol{h}|}\to 0\ (\boldsymbol{h}\to 0)$. 换一角度来考察此极限,固定 $\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^n$, $t\in\mathbf{R}$,有

$$\frac{|\boldsymbol{Bh}|}{|\boldsymbol{h}|}=\frac{|\boldsymbol{B}(t\boldsymbol{h})|}{|t\boldsymbol{h}|}\to 0\quad(t\to 0),$$

推得 $\boldsymbol{Bh}=0$,由于 $\boldsymbol{h}$ 的任意性知 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2$. 证毕.

定理 14.13 向量函数 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微的充分必要条件是:每个分量函数 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微 $(i=1,2,\cdots,m)$.

证明 设 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微,则①式

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{Ah}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|,$$

成立. 其中 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, $|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\to 0\ (\boldsymbol{h}\to 0)$. 考虑投影映射 $\boldsymbol{\pi}_i$: $\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$, $\boldsymbol{y}\mapsto y_i\,(i=1,2,\cdots,m)$, 显然 $\boldsymbol{\pi}_i\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R})$, 记 $A_i=\boldsymbol{\pi}_i\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, $\alpha_i=\boldsymbol{\pi}_i\circ\boldsymbol{\alpha}\ (i=1,2,\cdots,m)$. 注意到 $\boldsymbol{\pi}_i\circ\boldsymbol{f}=f_i$,所以将 $\boldsymbol{\pi}_i$ 作用到①式得

$$f_i(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-f_i(\boldsymbol{x}_0)=A_i\boldsymbol{h}+\alpha_i(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|\quad(i=1,2,\cdots,m).\qquad ②$$

由 $|\alpha_i(\boldsymbol{h})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\to 0(\boldsymbol{h}\to 0)$,根据数值函数微分定义,知 f_i 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微.

反之若②式成立,利用下式定义 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$:

$$\boldsymbol{Ah}=(A_1\boldsymbol{h},A_2\boldsymbol{h},\cdots,A_m\boldsymbol{h}).$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$. 则由②式可得①式. 由于 $|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i(\boldsymbol{h})|\to 0\ (\boldsymbol{h}\to 0)$,知 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微. 证毕.

利用本章 8.1 节的结果,可得下面两个推论.

推论 14.1 设 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微,则 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j}$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$存在,且

$$[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

称$[\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)]$为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 **Jacobi 矩阵**. 当 $m=n$ 时,称 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$为 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 **Jacobi 行列式**,也记作:

$$\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)=J_f(\boldsymbol{x}_0) \quad 或 \quad \left.\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_{\boldsymbol{x}_0}$$

推论 14.2 若 $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ $(i=1,2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, n)$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点连续,则 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微.

记号 $\boldsymbol{f}\in C^{(k)}(D)$表示每个分量 $f_i\in C^{(k)}(D)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$.

我们来讨论由参数方程和隐函数给出的 k 维曲面求其 k 维切空间问题. 设 $D\subset\mathbf{R}^k$ 为区域,向量函数 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$: $D\to\mathbf{R}^n(n>k)$若满足 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\in C^{(1)}(D)$,则称向量函数为 $\mathbf{R}^n$ 中 **k 维曲面**(不仅指值域,还包括对应规则与定义域). $\boldsymbol{t}_0\in D$,设线性算子 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}_0)\in L(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^n)$的秩为 k,则它的值域是 $\mathbf{R}^n$ 中 k 维子空间,再将其平移 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$得仿射子空间,称此仿射空间为 k 维曲面在 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$点的**切空间**,用方程表示为:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)+\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{h} \quad (\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^k).$$

当 $k=1$ 时,设 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,得到曲线的切线方程:

$$\frac{x_1-x_1(t_0)}{x_1'(t_0)}=\frac{x_2-x_2(t_0)}{x_2'(t_0)}=\cdots=\frac{x_n-x_n(t_0)}{x_n'(t_0)}.$$

当 $k=n-1$ 时,设 $\boldsymbol{t}=(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})$,利用方程组有非零解,其系数行列式为零条件得$(n-1)$维切空间方程:

$$\det\begin{bmatrix} x_1-x_1(\boldsymbol{t}_0) & \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_{n-1}} \\ x_2-x_2(\boldsymbol{t}_0) & \dfrac{\partial x_2(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_2(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n-x_n(\boldsymbol{t}_0) & \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n(\boldsymbol{t}_0)}{\partial t_{n-1}} \end{bmatrix}=0.$$

或

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(x_j-x_j(\boldsymbol{t}_0))\left.\frac{\partial(x_1, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \cdots, t_{n-1})}\right|_{t_0}=0.$$

记号$\hat{x}_j$ 表示略去 x_j.

设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为区域, $\boldsymbol{f}: D\to\mathbf{R}^k(n>k)$且 $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$, $\boldsymbol{a}\in D$,线性算子 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})\in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^k)$的秩为 k,下章我们要证明方程 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点邻域确定一过 $\boldsymbol{a}$ 点的$(n-k)$维曲面,该曲面在 $\boldsymbol{a}$ 点的$(n-k)$维切空间方程为:

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

它是线性算子 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$在 $\mathbf{R}^n$ 中的零空间平移距离 $\boldsymbol{a}$ 所得的仿射空间.

当 $k=1$ 时,记 $\boldsymbol{f}$ 为 f, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,则方程变为:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_j}(x_j-a_j)=0.$$

当 $k=n-1$ 时,记 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$,方程变为:

$$\frac{x_1-a_1}{(-1)^{n-1}\left.\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, \cdots, x_n)}\right|_{\boldsymbol{a}}}=\frac{x_2-a_2}{(-1)^{n-2}\left.\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_3, \cdots, x_n)}\right|_{\boldsymbol{a}}}=\cdots$$

$$=\frac{x_n-a_n}{\left.\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_{n-1})}{\partial(x_1,x_3,\cdots,x_{n-1})}\right|_a}.$$

思考练习 解答下列问题：

1. 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，求下列函数的 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$：

(1) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.　　　　(2) $f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|$.

(3) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$.

2. 说明微分定义等价于：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h}),$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\in\mathbf{R}^m$，且 $\lim\limits_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|}{|\boldsymbol{h}|}=0$.

3. $\boldsymbol{A}^T$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置，则参数表示的曲面法空间为：

$$\boldsymbol{x}'(t_0)^T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}(t_0))=0;$$

隐函数表示的曲面法空间为：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{h}\quad(\boldsymbol{h}\in\mathbf{R}^k).$$

试写出 $k=1$ 和 $n-1$ 时法空间的分量方程式.

8.3 向量函数的微分运算

定理 14.14 设 $D\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega\subset\mathbf{R}^m$ 为区域，$\boldsymbol{f}$: $D\to\Omega$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 点可微，$\boldsymbol{g}$: $\Omega\to\mathbf{R}^p$ 在 $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)\in\Omega$ 点可微，则 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微，且 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$.

证明 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}_0)$，当 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in D$，$\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k}\in\Omega$ 时，由可微定义得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\,|\boldsymbol{h}|,\quad \lim_{\boldsymbol{h}\to 0}|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|=0;$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})\,|\boldsymbol{k}|,\quad \lim_{\boldsymbol{k}\to 0}|\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})|=0.$$

补充定义 $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，令 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，则

$$|\boldsymbol{k}|=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\,|\boldsymbol{h}||\leqslant[\|\boldsymbol{A}\|+|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|]\,|\boldsymbol{h}|.\quad ①$$

估计 $\boldsymbol{F}$ 改变量，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}))-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0))\\&=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{k})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})\,|\boldsymbol{k}|\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|]+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}|,$$

利用①可得

$$\frac{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}$$

$$\leqslant \|\boldsymbol{B}\| \, |\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|+|\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})|[\|\boldsymbol{A}\|+|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|].$$

当 $\boldsymbol{h}\to 0$ 时，$|\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\to 0$. 又由①推出 $\boldsymbol{k}\to 0$,进而 $|\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{k})|\to 0$. 这样就有

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0}\frac{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|}=0,$$

即 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点可微,且 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 证毕.

若 $\boldsymbol{f}\in C^{(1)}(D)$, $\boldsymbol{g}\in C^{(1)}(\Omega)$,则 $\boldsymbol{F}\in C^{(1)}(D)$,且在 D 上成立

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}).$$

若 $n=m=p$,对上式取行列式得

$$\det\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})=\det\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$$

定理 14.15 (1) 设 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$: $D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$,且在 D 上可微,则 $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))'=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))'=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$;

(2) 设 f: $D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $\boldsymbol{g}$: $D\to\mathbf{R}^m$, 且在 D 上可微,则 $(f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))'=f(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})f'(\boldsymbol{x})$.

证明 我们只证点乘公式,其余两式一样可证. 由条件得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h})&=[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|]\\&\quad\cdot[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|]\\&=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\\&\quad+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}+\varepsilon(\boldsymbol{h}),\end{aligned}$$

其中数值函数 $\varepsilon(\boldsymbol{h})$ 为:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\boldsymbol{h})=\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}+[&\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\\&+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h})+\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\\&+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})\cdot\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|]|\boldsymbol{h}|,\end{aligned}$$

利用点乘的 Schwarz 不等式,得估计式

$$\frac{|\varepsilon(h)|}{|h|}\leqslant \|f'(x)\|\ \|g'(x)\|\ |h|+|f(x)|\,|\beta(h)|$$
$$+|g(x)|\,|\alpha(h)|+[\ \|f'(x)\|\,|\beta(h)|$$
$$+\|g(x)\|\,|\alpha(h)|+|\alpha(h)|\,|\beta(h)|\,]\,|h|\to 0$$
$$(h\to 0),$$

所以

$$\lim_{h\to 0}|f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)h-$$
$$g(x)\cdot f'(x)h|/|h|=0,$$

这说明 $f(x)\cdot g(x)$ 可微,且 $(f(x)\cdot g(x))'=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$. 证毕.

注 我们把向量 $f(x)\in\mathbf{R}^m$ 理解成线性算子 $f(x)\in L(\mathbf{R},\mathbf{R}^m)$,它的共轭算子记作 $f(x)^T\in L(\mathbf{R}^m,\mathbf{R})$,则公式也可写成 $(f(x)\cdot g(x))'=f(x)^Tg'(x)+g(x)^Tf'(x)$.

定理 14.16(中值不等式) 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为凸域, $f: D\to\mathbf{R}^m$, 且 $f\in C^{(1)}(D)$. 证明对任意 $a, b\in D$,存在 $\xi\in D$,使

$$|f(b)-f(a)|\leqslant \|f'(\xi)\|\ |b-a|.$$

证明 作辅助函数 $\varphi(t)=[f(b)-f(a)]\cdot f[a+t(b-a)]$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 由条件知 φ 在 $[0, 1]$ 上连续可微,根据一元中值定理得

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)\quad(0<\theta<1).\qquad ②$$

注意到 $\varphi(1)-\varphi(0)=[f(b)-f(a)]\cdot[f(b)-f(a)]=|f(b)-f(a)|^2$,和 $\varphi'(t)=[f(b)-f(a)]\cdot f'[a+t(b-a)](b-a)$, 记 $\xi=a+\theta(b-a)\in D$,由②式得

$$|f(b)-f(a)|^2=[f(b)-f(a)]\cdot f'(\xi)(b-a).$$

应用 Schwarz 不等式,并消去 $|f(b)-f(a)|$,即得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant \|f'(\xi)\|\ |b-a|.\text{ 证毕.}$$

定义 14.9 设 $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $f\in C^{(1)}(D)$, $x_0\in D$,若

$$\operatorname{rank}f'(x_0)<\min(n, m),$$

则称 x_0 是函数 $y=f(x)$ 的**临界点**, $y_0=f(x_0)$ 是向量函数的**临界值**.

若 $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$,则 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 是临界点的充要条件是:

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}=0.$$

若 $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,则 $\boldsymbol{x}_0\in D$ 是临界点的充要条件是:

$$\det f'(\boldsymbol{x}_0)=\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_{x_0}=0.$$

例 设 $f: D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$, $f\in C^{(2)}(D)$, $\boldsymbol{x}_0\in D$ 为函数临界点, $H_f(\boldsymbol{x}_0)$为 f 的 Hesse 矩阵,满足 $\det H_f(\boldsymbol{x}_0)\neq0$,则临界点是孤立的,即 $\exists\,\delta>0$,在空心邻域 $U^*(\boldsymbol{x}_0;\delta)$内无函数临界点.

证明 考虑向量函数

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=(f_1'(\boldsymbol{x}), f_2'(\boldsymbol{x}), \cdots, f_n'(\boldsymbol{x})): D\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n.$$

因 $f\in C^{(2)}(D)$,所以 $\boldsymbol{F}\in C^{(1)}(D)$,由推论 14.2 知 $\boldsymbol{F}$ 在 D 上可微,且

$$[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x})]=H_f(\boldsymbol{x}),\quad \det\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)=\det H_f(\boldsymbol{x}_0)\neq0.$$

根据定理 14.11 与定理 14.10,得出变换 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)$可逆,且

$$|\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}|\geqslant\lambda|\boldsymbol{h}|\quad(\lambda>0).$$

由微分定义和 $\boldsymbol{x}_0$ 是临界点,得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}+\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{h})|\boldsymbol{h}|$$

和

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0},$$

所以有

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})|\geqslant\lambda|\boldsymbol{h}|-\frac{\lambda}{2}|\boldsymbol{h}|=\frac{\lambda}{2}|\boldsymbol{h}|,\ (|\boldsymbol{h}|<\delta)$$

这表明 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}\in U^*(\boldsymbol{x}_0;\delta)$时, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h})$不是零向量,即 $\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{h}$ 不是 f 的临界点.

思考练习 解答下列问题:

1. $D\subset\mathbf{R}^n$ 为区域, $\boldsymbol{f}: D\to\mathbf{R}^m$ 且 $\boldsymbol{f}\in C^{(1)}(D)$.

(1) 若 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$,证明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$.

(2) 若 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}$,证明 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$.

2. 证明定理 14.15 中(2)并解释结果的意义.

3. 设 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^n$, 在标准基下,与矩阵

$$\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2}\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2\end{bmatrix}\quad(\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})$$

对应的线性变换记作 $\boldsymbol{Q}_x\in L(\mathbf{R}^n)$. 证明:

(1) $\boldsymbol{Q}_x^2=\boldsymbol{Q}_x$;

(2) $(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{Q}_x)^2=\boldsymbol{I}$($\boldsymbol{I}$ 为恒等变换);

(3) $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$,则 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_x)$.

(**注** 若把向量 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^n$ 理解成线性算子 $\boldsymbol{x}\in L(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$,它在标准基下的矩阵表示为

$$[\boldsymbol{x}]=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

(向量在取定基下也与列向量对应),共轭线性算子 $\boldsymbol{x}^T\in L(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$, $[\boldsymbol{x}^T]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$. 所以对 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}$, 有 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{x}\dfrac{\boldsymbol{x}^T}{|\boldsymbol{x}|}=|\boldsymbol{x}|\left(\boldsymbol{I}+\dfrac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{|\boldsymbol{x}|^2}\right)=|\boldsymbol{x}|\left(\boldsymbol{I}+\dfrac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T}{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}}\right)$. 分子 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$ 理解成两线性算子相乘,分母中 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ 理解成两向量点乘)

第十五章　隐函数存在定理

§1　隐函数存在定理

1.1　一个方程的情形

以前我们称由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数为隐函数. 这章我们来严格论证在什么条件下,方程 $F(x, y)=0$ 唯一地确定一个隐函数 $y=f(x)$.

先从几何上来探讨隐函数存在的条件. 求方程 $F(x, y)=0$ 的解,从几何上看即求曲面 $z=F(x, y)$ 与坐标平面 $z=0$ 的交线 $y=f(x)$. 是否曲面 $z=F(x, y)$ 与坐标平面 $z=0$ 一定有交线呢? 如抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 完全位于坐标平面 $z=0$ 之上,谈不上两者相交,所以要曲面与坐标平面有一交线,首先必须有一交点. 又两者有一交点是否必有一交线呢? 如曲面 $z=x^2+y^2$ 与坐标平面 $z=0$ 有一交点 $(0, 0)$,但除 $(0, 0)$ 外两者无其他交点,这是因为坐标平面 $z=0$ 恰好是曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $(0, 0)$ 点的切平面;又如曲面 $z=xy$ 与坐标平面 $z=0$ 有一交点 $(0, 0)$,此外还有两条交线 $x=0$, $y=0$,这也是因为坐标平面 $z=0$ 是曲面 $z=xy$ 在 $(0, 0)$ 点的切平面. 若曲面 $z=F(x, y)$ 与坐标平面 $z=0$ 有一交点 (x_0, y_0),且曲面在该点的切平面不是水平的,即

$$F_x'(x_0, y_0)^2+F_y'(x_0, y_0)^2 \neq 0,$$

这时曲面在 (x_0, y_0) 点的切平面为:

$$z = F_x'(x_0, y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0, y_0)(y-y_0).$$

切平面与坐标平面 $z=0$ 有一过 (x_0, y_0) 点的交直线:

$$F_x'(x_0, y_0)(x-x_0)+F_y'(x_0, y_0)(y-y_0)=0.$$

由于曲面在 (x_0, y_0) 邻域内可用切平面逼近,即近似看成切平面,所以猜想在交点邻域内,曲面与坐标平面有唯一一条过交点的交线.

定理 15.1 设 D 为 $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<b$ 的区域, $F(x, y)$ 满足: $F\in C^{(1)}(D)$, $F(x_0, y_0)=0$, $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$. 则存在区间 I: $|x-x_0|<\alpha$ $(\alpha<a)$ 和区间 J: $|y-y_0|<\beta$ $(\beta<b)$,方程 $F(x, y)=0$ 唯一地确定一个函数

$$f: I\to J,$$

满足: (1) $F(x, f(x))\equiv 0$, $\forall x\in I$;

(2) $y_0=f(x_0)$;

(3) $f(x)$ 在 I 上连续;

(4) $f(x)$ 在 I 上连续可导,且

$$f'(x)=-\frac{F_x'(x, f(x))}{F_y'(x, f(x))}, \ \forall x\in I.$$

证明 无妨设 $F_y'(x_0, y_0)>0$,否则我们只要用 $-F$ 来代替 F,它并不影响方程 $F(x, y)=0$ 的解. 因为 $F_y(x, y)$ 是连续的,我们可以找到一个以 (x_0, y_0) 为中心的矩形 R: $|x-x_0|<\alpha'$, $|y-y_0|<\beta$,且使 $\bar{R}\subset D$ 和

$$m=\min_{(x, y)\in R}F_y'(x, y)>0. \quad ①$$

由于一元函数 $F(x_0, y)$ 在区间 $[y_0-\beta, y_0+\beta]$ 上是 y 的严格递增函数和 $F(x_0, y_0)=0$,可得

$$F(x_0, y_0-\beta)<0, \quad F(x_0, y_0+\beta)>0.$$

又由于一元函数 $F(x, y_0-\beta)$ 和 $F(x, y_0+\beta)$ 的连续性,总可找到 $\alpha>0$ $(\alpha<\alpha')$,在区间 $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ 上有

$$F(x, y_0-\beta)<0, \quad F(x, y_0+\beta)>0. \quad ②$$

取区间 $I=(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ 和 $J=(y_0-\beta, y_0+\beta)$ (图 15-1),对 I 内任一取定的 x,一元函数 $F(x, y)$ 在区间 J 上连

续且严格递增,由连续函数中间值定理和②,知存在唯一的 $y\in J$,使 $F(x, y)=0$,这就是说,任给 $x\in I$,根据方程 $F(x, y)=0$,总有唯一的 $y\in J$ 与之对应,根据函数定义,它确定一个函数,记作

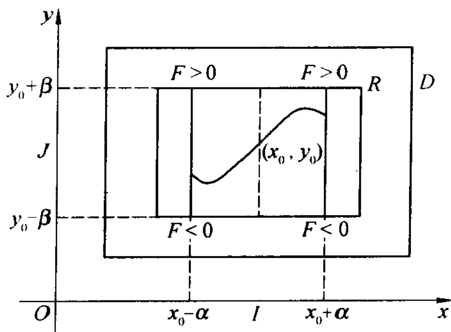


图 15-1

$$f: I\to J,\ x\mapsto y=f(x).$$

显然函数 $y=f(x)$ 满足结论(1)与(2),且是唯一的,即若另有一函数

$$\tilde{f}: I\to J,\ x\mapsto y=\tilde{f}(x),$$

满足 $F(x, \tilde{f}(x))\equiv 0,\ (x\in I)$,则 $f(x)\equiv\tilde{f}(x)\ (x\in I)$.

证结论(3). 设 $x,\ x+\Delta x\in I$,相应的 $f(x),\ f(x+\Delta x)$ 记为 $y,\ y+\Delta y$,根据 Taylor 公式,有

$$\begin{aligned}0&=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y)\\&=F_x'(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\Delta x\\&\quad+F_y'(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)\Delta y\quad(0<\theta<1).\end{aligned}\tag{③}$$

令 $M=\max\limits_{(x, y)\in R}|F_x'(x, y)|$,则由上式和①,得

$$|\Delta y|\leqslant\frac{M}{m}|\Delta x|,$$

因此,当 $\Delta x\to 0$ 时,有 $\Delta y\to 0$,即函数 $f(x)$ 在 x 点连续. 由 x 的任意性,知函数 $f(x)$ 上 I 上连续.

证结论(4). 由③得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x'(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}{F_y'(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)}\quad(0<\theta<1).\qquad ④$$

再由 $F\in C^{(1)}(D)$ 和结论(3),当 $\Delta x\to 0$ 时,上式右端趋于

$$-\frac{F_x'(x,\ y)}{F_y'(x,\ y)},$$

所以当 $\Delta x\to 0$ 时,④式左端极限存在,且

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x'(x,\ y)}{F_y'(x,\ y)}.$$

根据复合函数连续性,知 $f\in C^{(1)}(I)$. 证毕.

仿照上面的证明方法,可得下面定理.

定理 15.2 设区域 D 为: $|x_i-x_i^{(0)}|<a_i\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $|y-y^{(0)}|<b$. 函数 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ y)$ 满足:

(1) $F\in C^{(1)}(D)$;

(2) $F(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)},\ y^{(0)})=0$;

(3) $F_y'(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)},\ y^{(0)})\neq 0$.

则存在区域 I: $|x_i-x_i^{(0)}|<\alpha_i\ (\alpha_i<a_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 和区间 J: $|y-y^{(0)}|<\beta\ (\beta<b)$, 方程 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ y)=0$ 唯一地确定一个函数

$$f:\ I\to J,\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mapsto y=f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),$$

满足: (1) 在 I 上有 $F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n))\equiv 0$;

(2) $y^{(0)}=f(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_n^{(0)})$;

(3) $f\in C^{(1)}(I)$, 且

$$\mathrm{d}f=-\frac{F_{x_1}'}{F_y'}\mathrm{d}x_1-\frac{F_{x_2}'}{F_y'}\mathrm{d}x_2-\cdots-\frac{F_{x_n}'}{F_y'}\mathrm{d}x_n.$$

或采用矩阵写法:

$$[f_{x_1}'\ \ f_{x_2}'\ \ \cdots\ \ f_{x_n}']=-F_y'^{-1}[F_{x_1}'\ \ F_{x_2}'\ \ \cdots\ \ F_{x_n}'].$$

1.2 方程组的情形

讨论方程组

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad ①$$

的解,其想法是先从第二个方程解出 v,将它代入第一个方程,然后再解出 u,即解得 u, v 是 x, y 的函数.

定理 15.3 设区域 D 为: $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<a$, $|u-u_0|<b$, $|v-v_0|<b$,函数 $F(x, y, u, v)$, $G(x, y, u, v)$ 满足:

(1) $F, G\in C^{(1)}(D)$;

(2) $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$, $G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$;

(3) $\left.\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}\right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)}\neq 0.$

则存在区域 I: $|x-x_0|<\alpha_1$, $|y-y_0|<\alpha_2$ $(\alpha_1<a, \alpha_2<a)$ 和区域 J: $|u-u_0|<\beta_1$, $|v-v_0|<\beta_2$ $(\beta_1<b, \beta_2<b)$,方程组①唯一地确定一组函数

$$\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y), \end{cases} \quad I\to J,$$

满足:(1) 在 I 上 $\begin{cases} F(x, y, f(x, y), g(x, y))\equiv 0, \\ G(x, y, f(x, y), g(x, y))\equiv 0; \end{cases}$

(2) $u_0=f(x_0, y_0)$, $v_0=g(x_0, y_0)$;

(3) $f, g\in C^{(1)}(I)$,且

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u \\ \mathrm{d}v \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \end{pmatrix}.$$

证明 记点 $M_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$,条件(3)为

$$\begin{vmatrix} F_u(M_0) & F_v(M_0) \\ G_u(M_0) & G_v(M_0) \end{vmatrix}\neq 0.$$

由此推出 $G_u(M_0)$ 与 $G_v(M_0)$ 中至少有一不为零,不妨设 $G_v(M_0)\neq 0$. 应用定理 15.2,存在区域 R: $|x-x_0|<\alpha_1'$, $|y-y_0|<\alpha_2'$, $|u-u_0|<\beta'$, $(\alpha_1'<a, \alpha_2'<a, \beta'<b)$ 和区间 J_2: $|v-v_0|<\beta_2$ $(\beta_2<b)$,方程 $G(x, y, u, v)=0$ 唯一地确定一个函数

$$v=\varphi(x,y,u):R\to J_2 \qquad ②$$

满足:(1) 在 R 上有 $G(x,y,u,\varphi(x,y,u))\equiv 0$; ③

(2) $v_0=\varphi(x_0,y_0,u_0)$; ④

(3) $\varphi\in C^{(1)}(R)$. ⑤

将②代入①中第一个方程,得区域 R 上方程:

$$H(x,y,u)\overset{\text{def}}{=\!=}F(x,y,u,\varphi(x,y,u))=0. \qquad ⑥$$

由⑤和 $F\in C^{(1)}(D)$,得 $H\in C^{(1)}(R)$. 又由定理条件(2)和④知 $H(x_0,y_0,u_0)=0$,因

$$H_u=F_u+F_v\varphi_u=F_u-F_v\frac{G_u}{G_v}=\frac{1}{G_v}\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix},$$

故有

$$H_u(x_0,y_0,u_0)=\frac{1}{G_v(M_0)}\begin{vmatrix}F_u(M_0) & F_v(M_0)\\ G_u(M_0) & G_v(M_0)\end{vmatrix}\neq 0,$$

对方程⑥可以应用定理 15.2,求得区域

$$I:|x-x_0|<\alpha_1,\ |y-y_0|<\alpha_2\ (\alpha_1<\alpha_1',\ \alpha_2<\alpha_2')$$

和区间 J_1: $|u-u_0|<\beta_1\ (\beta_1<\beta')$,方程 $H(x,y,u)=0$ 唯一地确定一个函数

$$u=f(x,y):I\to J_1$$

满足:(1) 在 I 上, $H(x,y,f(x,y))\equiv 0$;

(2) $u_0=f(x_0,y_0)$;

(3) $f\in C^{(1)}(I)$.

现在令区域 J 为: $|u-u_0|<\beta_1$, $|v-v_0|<\beta_2$ 和

$$g(x,y)\overset{\text{def}}{=\!=}\varphi(x,y,f(x,y)).$$

容易验证函数组

$$(u=f(x,y),\ v=g(x,y)):I\to J$$

满足:(1) 在 I 上有

$$F(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0,$$
$$G(x,y,f(x,y),g(x,y))\equiv 0;$$

(2) $u_0=f(x_0,y_0)$, $v_0=g(x_0,y_0)$;

(3) $f,\ g\in C^{(1)}(I)$.

对(1)求微分和由一阶微分形式的不变性,得

$$\begin{cases}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_u\mathrm{d}u+F_v\mathrm{d}v=0,\\ G_x\mathrm{d}x+G_y\mathrm{d}y+G_u\mathrm{d}u+G_v\mathrm{d}v=0.\end{cases}$$

将上式改写成矩阵形式.

$$\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=0,$$

由定理 15.2 证明(读者可仿定理 15.1 证明完成)知在 I 上

$$\det\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}\neq 0\quad (u=f(x,\ y),\ v=g(x,\ y)),$$

即得

$$\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix}=-\begin{bmatrix}F_u & F_v'\\ G_u & G_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}f_x & f_y\\ g_x & g_y\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{bmatrix}.$$

最后来证解的唯一性.若另有函数组

$$(u=\tilde{f}(x,\ y),\ v=\tilde{g}(x,\ y)):\ I\to J$$

满足 $F(x,y,\tilde{f}(x,y),\tilde{g}(x,y))\equiv 0$, $G(x,y,\tilde{f}(x,y),\tilde{g}(x,y))\equiv 0$, $(x,\ y)\in I$. 我们要说明在 I 上有

$$f(x,\ y)\equiv\tilde{f}(x,\ y),\quad g(x,\ y)\equiv\tilde{g}(x,\ y).$$

首先由③推出在 I 上有

$$G(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y),\ \varphi(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y)))\equiv 0,$$

再由解②唯一性和 $G(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y),\ \tilde{g}(x,\ y))\equiv 0$,推出

$$\tilde{g}(x,\ y)\equiv\varphi(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y)),\quad (x,\ y)\in I,$$

因此在 I 上有

$$\begin{aligned}H(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y))&\equiv F(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y),\ \varphi(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y)))\\ &\equiv F(x,\ y,\ \tilde{f}(x,\ y),\ \tilde{g}(x,\ y))\equiv 0,\end{aligned}$$

上式表明方程 $H(x,\ y,\ u)=0$ 有解, $\tilde{f}:\ I\to J$,然而根据解的唯一性,必须有

$$f(x, y) \equiv \tilde{f}(x, y), \quad (x, y) \in I,$$

也就有

$$g(x, y) \equiv \tilde{g}(x, y), \quad (x, y) \in I.$$ 证毕.

运用数学归纳法,可以证明下面定理.

定理 15.4 区域 D 为: $|x_j - x_j^{(0)}| < a$, $|y_i - y_i^{(0)}| < b$ $(j=1, 2, \cdots, n;\ i=1, 2, \cdots, m)$, m 个函数 $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$满足:

(1) $F_i \in C^{(1)}(D)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$;

(2) $F_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \cdots, y_m^{(0)}) = 0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$;

(3) $\left.\dfrac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_m)}\right|_{(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \cdots, y_m^{(0)})} \neq 0.$

则存在区域 I: $|x_j - x_j^{(0)}| < \alpha_j$ $(\alpha_j < a,\ j=1, 2, \cdots, n)$和区域 J: $|y_i - y_i^{(0)}| < \beta_i$ $(\beta_i < b,\ i=1, 2, \cdots, m)$,方程组

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

唯一地确定 m 个函数

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, m):\ I \to J.$$

满足:(1) 在 I 上有

$$F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, f_1, f_2, \cdots, f_m) \equiv 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m);$$

(2) $y_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ $(i=1, 2, \cdots, m)$;

(3) $f_i \in C^{(1)}(I)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$,且

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_m \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}.$$

我们把定理 15.4 改述成向量函数形式,为此需要引入一些新的记号. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^m$,记 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^{n+m}$. 类似 $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{k} \in \mathbf{R}^m$, $(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) \in \mathbf{R}^{n+m}$. 对每一线性算子 $\boldsymbol{A} \in$

$L(\mathbf{R}^{n+m}, \mathbf{R}^m)$,我们可以定义两个线性算子 $\boldsymbol{A}_x \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 和 $\boldsymbol{A}_y \in L(\mathbf{R}^m)$,其定义为: $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{k} \in \mathbf{R}^m$,

$$\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{h} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}, \mathbf{0}), \quad \boldsymbol{A}_y\boldsymbol{k} = \boldsymbol{A}(\mathbf{0}, \boldsymbol{k}).$$

因为对每一 $\boldsymbol{h} \in \mathbf{R}^n$,有一 $\mathbf{R}^m$ 中向量 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}, \mathbf{0})$ 与之对应,所以 $\boldsymbol{A}_x$ 是一映射,无需多说它是线性的,故 $\boldsymbol{A}_x \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$,同理 $\boldsymbol{A}_y \in L(\mathbf{R}^m)$. 容易验证 $\|\boldsymbol{A}_x\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$, $\|\boldsymbol{A}_y\| \leqslant \|\boldsymbol{A}\|$. 反之若给定 $\boldsymbol{A}_x \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ 和 $\boldsymbol{A}_y \in L(\mathbf{R}^m)$,我们可以用式子 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{h} + \boldsymbol{A}_y\boldsymbol{k}$ 定义 $\boldsymbol{A} \in L(\mathbf{R}^{n+m}, \mathbf{R}^m)$.

设 $D \subset \mathbf{R}^{n+m}$ 为区域, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in D$, $\boldsymbol{F}: D \to \mathbf{R}^m$ 在 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 点可微,按可微定义,即

$$\lim_{(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k}) \to \mathbf{0}} \frac{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})|}{|(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})|} = 0.$$

记 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 上式中令 $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$,得

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \mathbf{0}} \frac{|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{A}_x\boldsymbol{h}|}{|\boldsymbol{h}|} = 0,$$

这说明固定 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$,函数 $\boldsymbol{F}$ 关于 $\boldsymbol{x}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点可微,所以 $\boldsymbol{A}_x = \boldsymbol{F}_x'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$. 同理 $\boldsymbol{A}_y = \boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 设 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \cdots, F_m)$,则在标准基下,

$$[\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$$

若 $\boldsymbol{F} \in C^{(1)}(D)$,则 $\boldsymbol{F}$ 在 D 上可微,且

$$\det\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \det\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}.$$

设 $\det\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \neq \mathbf{0}$,把行列式看成变量 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 的实连续函数,则存在 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 点邻域,在该邻域内 $\det\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq \mathbf{0}$,即线性变换 $\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ 可逆.

定理 15.4(向量函数形式) 设 $D\subset \mathbf{R}^{n+m}$ 为区域,$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\in D$,函数 $\boldsymbol{F}: D\to \mathbf{R}^m$ 满足:

(1) $\boldsymbol{F}\in C^{(1)}(D)$; (2) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=0$; (3) $\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$可逆.

则存在 $\boldsymbol{a}$ 点邻域 I,和 $\boldsymbol{b}$ 点邻域 J,方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\mathbf{0}$ 唯一地确定一函数 $\boldsymbol{f}: I\to J$, $\boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,满足:

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\equiv \mathbf{0}\quad (\boldsymbol{x}\in I)$;

(2) $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$;

(3) $\boldsymbol{f}\in C^{(1)}(I)$,且 $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{F}_y'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^{-1}\boldsymbol{F}_x'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))\quad (\boldsymbol{x}\in I)$.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $F(x, y)=y^2-x^2$ 在$(0, 0)$点邻域有 $y=y(x)$满足 $y(0)=0$ 和 $F(x, y(x))\equiv 0$,则称 $y=y(x)$是方程 $F(x, y)=0$ 的隐函数.

(1) 方程有几个连续隐函数解?

(2) 方程有几个连续可微隐函数解?

(3) 方程有几个隐函数解?

2. 若在定理 15.1 中条件 $F\in C^{(1)}(D)$改为 $F\in C(D)$, $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$ 改为 $F(x, y)$关于 y 严格递增,证明前三个结论成立.

§2 逆变换存在定理

给定区域 $D\subset \mathbf{R}^n$ 到区域 $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ 的变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,或写成分量形式

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\quad (i=1, 2, \cdots, n), \qquad ①$$

满足 $f_i\in C^{(1)}(D)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,问有逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$或

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)\quad (i=1, 2, \cdots, n) \qquad ②$$

存在的充分条件.

先来看逆变换存在的必要条件. 若①给出 D 到 Ω 的同胚变换即有连续逆变换②,则由第十四章 2.3 节知,变换①的 Jacobi

行列式

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \qquad ③$$

或大于等于零,或小于等于零,若①为同胚变换,除 $f_i \in C^{(1)}(D)$ 外,又设 $\varphi_i \in C^{(1)}(\Omega)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,则由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y}$,得 $\det\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))\det\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{y})=1$,回到分量写法为:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)} \cdot \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = 1.$$

所以 Jacobi 行列式③在 D 上或恒大于零或恒小于零.

反之,若变换①的 Jacobi 行列式③在 D 上或恒大于零或小于零,是否是有逆变换②存在的充分条件呢? 现在 $n=1$ 与 $n>1$ 有本质的不同. 例如考虑变换

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

它把区域 D: $0<x^2+y^2<1$ 映为区域 Ω: $0<u^2+v^2<1$. 为了看清这一点最好采用极坐标,设 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$; $u=\rho\cos\varphi$, $v=\rho\sin\varphi$,则变换在极坐标系下可写成

$$\rho = r^2, \ \varphi = 2\theta.$$

由此可看出变换把 D 映为 Ω,把 D 内两点(r, θ)与$(r, \pi+\theta)$映为 Ω 内一点(ρ, φ),故在 Ω 上没有逆变换. 但变换的 Jacobi 行列式为:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2+y^2) > 0, \quad (x, y) \in D.$$

这例说明 Jacobi 行列式恒大于零,不能保证有逆变换存在. 但下面定理说明一定有局部逆变换存在,所以 Jacobi 行列式大于零是有局部逆变换存在的充分条件. 以下文中一点邻域指包含该点的一个区域,不要求是圆形区域.

定理 15.5 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是区域, $y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in C^{(1)}(D)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})\in D$,且该点的 Jacobi 行列式

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

则存在 P_0 点邻域 $U\subset D$,和 P_0 点的像点 Q_0 的邻域 V,使得

(1) 变换 $y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$在 U 内单叶;

(2) 上述变换把 U 映为 V;

(3) 逆变换 $x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in C^{(1)}(V)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

证明 为简单起见,以 $n=2$ 情形加以证明.设变换 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2): D\to\Omega$ 为:

$$\begin{cases}x=f_1(u, v),\\ y=f_2(u, v),\end{cases}\quad (u, v)\in D,$$

$f_1, f_2\in C^{(1)}(D)$,且

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)} \neq 0.$$

令 $x_0=f_1(u_0, v_0)$, $y_0=f_2(u_0, v_0)$和区域 R: $|x-x_0|<a$, $|y-y_0|<a$, $|u-u_0|<b$, $|v-v_0|<b$(使后两不等式确定的正方形含在 D 内),在 R 上考虑方程组

$$\begin{cases}F_1(x, y, u, v)\overset{\text{def}}{=\!=}x-f_1(u, v)=0,\\ F_2(x, y, u, v)\overset{\text{def}}{=\!=}y-f_2(u, v)=0,\end{cases} \qquad ④$$

满足 $F_1, F_2\in C^{(1)}(R)$, $F_i(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$, $(i=1, 2)$和

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}\right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = \left.\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}\right|_{(u_0, v_0)} \neq 0,$$

由隐函数存在定理 15.4, 存在区域 V: $|x-x_0|<\alpha_1$, $|y-y_0|<\alpha_2$ $(\alpha_1, \alpha_2<a)$和区域 J: $|u-u_0|<\beta_1$, $|v-v_0|<\beta_2$ $(\beta_1, \beta_2<b)$,方程组④唯一地确定函数组(图 15-2)

$$\begin{cases}u=\varphi_1(x, y),\\ v=\varphi_2(x, y),\end{cases}\quad V\to J,$$

满足: (1) 在 V 上 $x\equiv f_1[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$, $y\equiv f_2[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$;

(2) $u_0=\varphi_1(x_0, y_0)$, $v_0=\varphi_2(x_0, y_0)$;

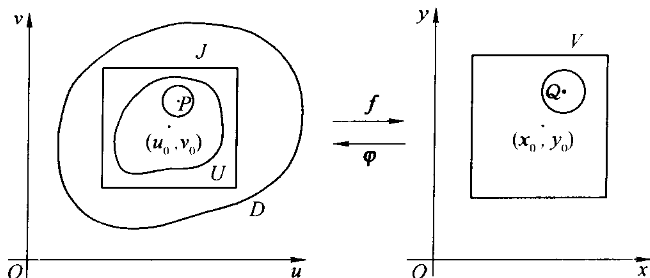


图 15-2

(3) $\varphi_i\in C^{(1)}(V)$ $(i=1, 2)$.

结果(1)表明变换 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1, \varphi_2)$把 V 中点(x, y)映为 J 中的点(u, v),变换 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2)$又把点$(u, v)$映回到点$(x, y)$,由此可得变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 上单叶.因为如果 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 上不单叶,$\boldsymbol{\varphi}$ 把 V 中两个不同点映为 J 中一个点,变换 $\boldsymbol{f}$ 又把一点映回到 V 中两个不同点,这与变换 $\boldsymbol{f}$ 的单值性矛盾.所以 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 V 上单叶.

记 U 为 V 在变换 $\boldsymbol{\varphi}$ 下的像集.则变换 $\boldsymbol{f}$ 在 U 上也是单叶,余下只要证 U 为区域.为此任取一点 $P\in U$,只要证 P 是 U 的内点.设 P 点在 $\boldsymbol{f}$ 映射下的像点为 $Q\in V$,因 V 为开集,总可求出 $\varepsilon>0$,使 Q 点的 ε 邻域 $B(Q;\varepsilon)\subset V$.由变换 $\boldsymbol{f}$ 的连续性,存在 $\delta>0$,变换 $\boldsymbol{f}$ 把圆形邻域 $B(P;\delta)$映入 $B(Q;\varepsilon)$内,无妨设 $B(P;\delta)\subset J$.任给 $P'\in B(P;\delta)$,有 $Q'=\boldsymbol{f}(P')\in B(Q,\varepsilon)$,只要证 $\boldsymbol{\varphi}(Q')=P'$.假设 $\boldsymbol{\varphi}(Q')=P^*\neq P'$,我们在区域 V 上构造映射 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}: V\to J$,它与 $\boldsymbol{\varphi}$ 只在 Q' 点的值不同,把 P^* 改为 P',则映射 $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ 也是方程组④的解,这与解的唯一性矛盾.既然 $\boldsymbol{\varphi}(Q')=P'$,这说明邻域 $B(P,\delta)$每一点都是 $\boldsymbol{\varphi}$ 映射下 $B(Q;\varepsilon)$的像点,所以

$$B(P;\delta)\subset U,$$

即 U 为开集.又连续变换 φ 把道路连通集 V 映为道路连通集 U,故 U 为区域.证毕.

推论 15.1 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为区域,变换 $y_i=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i=1, 2, \cdots, n)\in C^{(1)}(D)$. 若在 D 上变换的 Jacobi 行列式不为零,则 D 的像集合 Ω 为一区域.

证明 任取一点 $Q\in\Omega$,总可找出一点 $P\in D$,变换①把 P 映为 Q,由于在 P 点变换①的 Jacobi 行列式不为零,根据定理 15.5,存在 P 点邻域 $U\subset D$ 和 Q 点邻域 V,变换①在 U 上单叶,且把 U 映为 V,故 $V\subset\Omega$,即 Q 为 Ω 的内点. 由 Q 的任意性,知 Ω 为开集. 又由于连续变换把道路连通集映为道路连通集,所以 Ω 为区域. 证毕.

由定理 15.5 与推论 15.1 可得下面结果

推论 15.2 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 为区域,变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在 D 上单叶,且 $\boldsymbol{f}\in C^{(1)}(D)$, Jacobi 行列式

$$J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x})\neq 0,$$

则 $\boldsymbol{f}(D)=\Omega$ 为区域,逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})$在 Ω 上属于 $C^{(1)}$ 类,这时,也称 $\boldsymbol{f}\colon D\to\Omega$ 为**微分同胚**.

注 $n=1$ 时单叶条件可以省略; $n>1$ 时单叶条件不能省略.

思考练习 解答下列问题:

1. 若 $u=f(x, y)$, $v=g(x, y)$在(x_0, y_0)邻域内连续、偏导数存在,且 $\left.\dfrac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}\right|_{(x_0, y_0)}\neq 0$,问反函数定理是否成立? $\left(\text{提示: 考察例子 } u=x+2x^2\sin\dfrac{1}{x},\ v=y\right)$

2. 设 $x=f(u, v)$, $y=g(u, v)$在(u_0, v_0)邻域有反函数 $u=\varphi(x, y)$, $v=\psi(x, y)$. 若 $f_u'\cdot\varphi_x'=1$,则或者 x 只是 u 的函数,或 y 只是 v 的函数.

第十六章 一般极值与条件极值

§1 一般极值问题

1.1 极值存在的必要条件

求多元函数在其定义域上的最大值或最小值问题,称它为一般极值问题.与一元函数一样,求多元函数的最大、最小值是通过求函数的极值而得到的.

定义 16.1 设 $f(x, y)$ 在域 D 上定义,$(x_0, y_0)\in D$,若存在邻域 $U=U((x_0, y_0); \delta)\subset D$,使对一切 $(x, y)\in U$,有

$$f(x_0, y_0)\geqslant f(x, y)\quad (f(x_0, y_0)\leqslant f(x, y))$$

成立,就说 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点达到**极大(小)值**,(x_0, y_0) 称为函数的**极大(小)点**.极大点与极小点统称为**极值点**,极大值与极小值统称为**极值**.

若任给 $\delta>0$,邻域 $U((x_0, y_0); \delta)$ 中总存在两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2),使

$$f(x_1, y_1)> f(x_0, y_0),\quad f(x_2, y_2)< f(x_0, y_0),$$

则称 (x_0, y_0) 为函数的**鞍点**.

设 $f(x, y)$ 在有界闭域 $\overline{D}$ 上连续,则 $f(x, y)$ 在 $\overline{D}$ 上一定有最大、最小值,它或在闭域的内点达到,或在边界点达到.求实际问题的最大(小)值差不多总在内点达到,即在极值点达到,因此求最大(小)值问题可归结为求极值问题.

定理 16.1 设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点取极值,且函数在该点可微,则

$$f_x(x_0, y_0)=0, \quad f_y(x_0, y_0)=0,$$

或

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)=0.$$

证明 由定理条件,知一元函数 $f(x, y_0)$在 x_0 点的取极值,根据一元函数极值的必要条件,得

$$f_x(x_0, y_0)=0.$$

同理可得

$$f_y(x_0, y_0)=0. \text{证毕.}$$

定义 16.2 若函数 $f(x, y)$在(x_0, y_0)点满足:

$$f_x(x_0, y_0)=0, \quad f_y(x_0, y_0)=0.$$

则称(x_0, y_0)点为函数的**临界点**或**稳定点**.

若(x_0, y_0)是函数 $z=f(x, y)$的临界点,则曲面 $z=f(x, y)$在$(x_0, y_0, z_0=f(x_0, y_0))$点的切平面是水平的.

注 由定理 16.1 知,若函数在极值点处可微,则极值点一定是临界点;反之,临界点不一定是极值点.例如 $z=xy$, $(0, 0)$点是它的临界点,但不是极值点而是函数的鞍点.

例 1 证明具有已知周长的三角形中,等边三角形有最大面积.

证明 设三角形的边长为 x, y, z,记周长为 $2p$: $x+y+z=2p$.于是三角形面积 S 可由公式

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \\ &= \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)} \end{aligned}$$

给出.求 S 的最大值,相当于求函数

$$f(x, y)=(p-x)(p-y)(x+y-p)$$

在图 16-1 中区域 D 上的最大值.

解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y)=(p-y)(2p-2x-y)=0, \\ f_y(x, y)=(p-x)(2p-x-2y)=0. \end{cases}$$

得四组解, $(0, p)$, (p, p), $(p, 0)$, $\left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$. 由于 $f(x,$

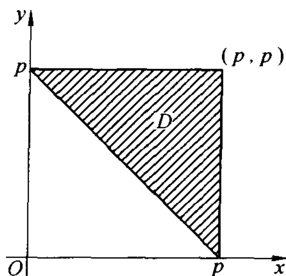


图 16-1

y)在边界∂D上取值为零,所以最大值一定在D内部达到,而函数在D内只有一个临界点,故临界点$\left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$即为最大点.这就证明了

$$x = y = z = \frac{2}{3}p$$

时等边三角形有最大面积.

例 2 求证:锐角三角形内一点到三顶点联线成等角时,该点到三顶点距离之和为最小.

证明 设$P_i(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, 3)$为一锐角三角形的顶点,如果要求的点为$P(x, y)$,记距离

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \quad (i=1, 2, 3),$$

问题即求P点坐标x, y,使函数

$$f(x, y) = r_1 + r_2 + r_3$$

取最小值.

由极值的必要条件,得(x, y)应满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{r_1}+\dfrac{x-x_2}{r_2}+\dfrac{x-x_3}{r_3}=0, \\ \dfrac{y-y_1}{r_1}+\dfrac{y-y_2}{r_2}+\dfrac{y-y_3}{r_3}=0. \end{cases} \quad ①$$

我们把方程①的解仍记为(x, y),则①表示三个单位向量

$$e_i = \left(\frac{x - x_i}{r_i} \quad \frac{y - y_i}{r_i}\right) \quad (i = 1, 2, 3)$$

之和为零向量(图 16-2):

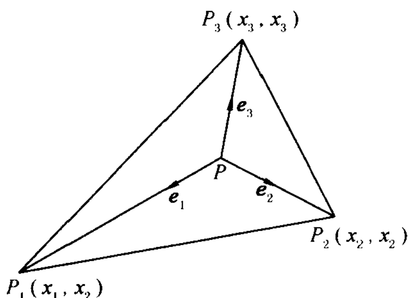


图 16-2

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

因此有

$$(e_1 + e_2)\cdot(e_1 + e_2) = (-e_3)\cdot(-e_3) = 1,$$

进而得

$$e_1 \cdot e_2 = -\frac{1}{2},$$

因 e_1 与 e_2 的夹角应小于 π,故 e_1 与 e_2 的夹角为 $\frac{2}{3}\pi$. 同理, e_2 与 e_3 和 e_3 与 e_1 的夹角皆为 $\frac{2}{3}\pi$. 这说明 P 点与三顶点联线成等角时使 $f(x, y)$取最小值. 要说明 P 点确实使函数 $f(x, y)$ 取最小值,必须讨论一般极值的充分条件.

1.2 极值存在的充分条件

定义 16.3 设 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$点的邻域内属于$C^{(2)}$类, $\boldsymbol{x}_0$ 点是函数 $f(\boldsymbol{x})$的临界点: $f'(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 记 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$为函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的 Hesse 矩阵,若

$$\det H_f(\boldsymbol{x}_0) \neq 0,$$

则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数**非退化的临界点**.

定理 16.2 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是函数 $f(\boldsymbol{x})$ 非退化的临界点,这时矩阵 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 或正定,或负定,或不定.

(1) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定的,则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取极小值,或临界点 $\boldsymbol{x}_0$ 是极小点;

(2) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是负定的,则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取极大值,或临界点 $\boldsymbol{x}_0$ 是极大点;

(3) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是不定的,则 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点无极值,或临界点 $\boldsymbol{x}_0$ 是鞍点.

证明 由 Taylor 公式,得

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T$$

$$H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2).$$

令 S 为 n 维空间里的单位球面: $|\boldsymbol{x}|=1$ 或 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,则连续函数 $\boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x}$ 在有界闭集 S 上取到它们最大、最小值,记

$$\lambda_1 = \min_{x\in S} \boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\xi},$$

$$\lambda_2 = \max_{x\in S} \boldsymbol{x}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\eta},$$

其中 $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ 为 n 维单位向量.

(1) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定的,则

$$\lambda_2 \geqslant \lambda_1 > 0,$$

由此得

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^T H_f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

$$+ o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2)$$

$$\geqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_1}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 + o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2).$$

总存在 $\delta>0$,当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 时,有

$$f(\boldsymbol{x}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_1}{4}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 \geqslant f(\boldsymbol{x}_0),$$

所以函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取到极小值.

(2) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是负定的,则

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 0,$$

由此得

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_2}{2}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 + o(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2).$$

总存在 $\delta>0$,当 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$ 时,有

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_2}{4}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|^2 \leqslant f(\boldsymbol{x}_0),$$

所以 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取到极大值.

(3) 若 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是不定的,则

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0.$$

设 t 为实数,

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{\xi}) &= f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{\xi}^T H_f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\xi} + o(t^2 \mid \boldsymbol{\xi}|^2) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_1}{2}t^2 + o(t^2), \end{aligned}$$

总存在 $\delta>0$,当 $0<|t|<\delta$ 时,有

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{\xi}) \leqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_1}{4}t^2 < f(\boldsymbol{x}_0),$$

同理,当 $0<|t|<\delta$ 时,有

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{\eta}) \geqslant f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\lambda_2}{4}t^2 > f(\boldsymbol{x}_0).$$

所以函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点无极值. 证毕.

在代数课程中,给出了用矩阵 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 的主子行列式来判别 $H_f(\boldsymbol{x}_0)$ 是正定、负定、不定的条件,为此记

$$\Delta_k(\boldsymbol{x}_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_k^2} \end{vmatrix}$$

$$(k=1, 2, \cdots, n),$$

推论 16.1 设 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$非退化的临界点.

(1) 若 $\Delta_k(\boldsymbol{x}_0)>0\ (k=1, 2, \cdots, n)$,则 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取极小值;

(2) 若$(-1)^k\Delta_k(\boldsymbol{x}_0)>0\ (k=1, 2, \cdots, n)$,则 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点取极大值;

(3) 若存在一偶数 $k\ (1<k\leqslant n)$,使 $\Delta_k(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0$,或存在两个不同奇数 $i, j\ (1\leqslant i, j\leqslant n)$,使 $\Delta_i(\boldsymbol{x}_0)\Delta_j(\boldsymbol{x}_0)\leqslant 0$,则 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点无极值.

当 $n=2$ 时,由推论 16.1 导出下面推论.

推论 16.2 设(x_0, y_0)是二元函数 $f(x, y)$的非退化临界点,记

$$A=f_{xx}(x_0, y_0),\ B=f_{xy}(x_0, y_0),\ C=f_{yy}(x_0, y_0).$$

(1) 若 $A>0$, $AC-B^2>0$,则函数在(x_0, y_0)点取极小值;

(2) 若 $A<0$, $AC-B^2>0$,则函数在(x_0, y_0)点取极大值;

(3) 若 $AC-B^2<0$,则函数在(x_0, y_0)点无极值.

考虑到有些读者没有学过代数中有关知识,我们给出推论 16.2 的一个直接证明.

证明 对自变量采用极坐标,这时 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}
&f(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\\
&=f(x_0, y_0)+\frac{r^2}{2}(\cos\theta\ \ \sin\theta)\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}+o(r^2)\\
&=f(x_0, y_0)+\frac{r^2}{2}(A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta)+o(r^2)\\
&=f(x_0, y_0)+\frac{r^2}{2}A\left[\left(\cos\theta+\frac{B}{A}\sin\theta\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}\sin^2\theta\right]\\
&\quad+o(r^2).
\end{aligned}$$

(1) 若 $A>0$, $AC-B^2>0$,函数

$$\varphi(\theta)=\left(\cos\theta+\frac{B}{A}\sin\theta\right)^2+\frac{AC-B^2}{A}\sin^2\theta$$

在$[0, 2\pi]$上有正的最小值,如同定理 16.2 的证明,知函数

$f(x, y)$在(x_0, y_0)点取极小值;

(2) 若$A<0$, $AC-B^2>0$,函数$A\varphi(\theta)$在$[0, 2\pi]$上有负的最大值,所以$f(x, y)$在(x_0, y_0)点取极大值;

(3) 若$AC-B^2<0$,一种情形是A、C中有一不为零,无妨设$A>0$,当点(x, y)沿平行于实轴($\theta=0$)方向充分接近于(x_0, y_0)时,有$f(x, y)>f(x_0, y_0)$. 当点(x, y)沿与实轴夹角为θ_0方向充分接近于(x_0, y_0)时,其中θ_0满足

$$\cos\theta_0+\frac{B}{A}\sin\theta_0=0.$$

有$f(x, y)<f(x_0, y_0)$,所以$f(x, y)$在(x_0, y_0)点无极值. 另一种情况是$A=C=0$,这时$B\neq 0$,无妨设$B>0$. 当点(x, y)沿$\theta=\frac{\pi}{4}$方向充分接近于(x_0, y_0)时,有$f(x, y)>f(x_0, y_0)$,当点(x, y)沿$\theta=-\frac{\pi}{4}$方向充分接近于(x_0, y_0)时,有$f(x, y)<f(x_0, y_0)$,所以$f(x, y)$在(x_0, y_0)点无极值. 证毕.

回到本章1.1节例2,我们来说明P点是函数

$$f(x, y)=r_1+r_2+r_3$$

的极小点,因而也是最小点. 事实上,

$$A=\frac{(y-y_1)^2}{r_1^3}+\frac{(y-y_2)^2}{r_2^3}+\frac{(y-y_3)^2}{r_3^3}>0,$$

$$C=\frac{(x-x_1)^2}{r_1^3}+\frac{(x-x_2)^2}{r_2^3}+\frac{(x-x_3)^2}{r_3^3}>0,$$

$$B=-\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r_1^3}-\frac{(x-x_2)(y-y_2)}{r_2^3}-\frac{(x-x_3)(y-y_3)}{r_3^3}.$$

因此

$$AC-B^2=\frac{\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1\\ x-x_2 & y-y_2\end{vmatrix}^2}{r_1^3r_2^3}+\frac{\begin{vmatrix}x-x_2 & y-y_2\\ x-x_3 & y-y_3\end{vmatrix}^2}{r_2^3r_3^3}.$$

$$+\frac{\begin{vmatrix} x-x_3 & y-y_3 \\ x-x_1 & y-y_1 \end{vmatrix}^2}{r_3^3 r_1^3}>0,$$

所以 $P(x, y)$ 点为函数的极小点.

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列函数的极值:

(1) $f(x, y)=x^2-xy+y^2-2x+y$.

(2) $f(x, y)=\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y)$ $(0\leqslant x, y\leqslant\pi)$.

(3) $f(x, y, z)=(x+y+z)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$.

2. 求出最小正数 A 和最大负数 B,使得不等式

$$\frac{B}{xy}\leqslant \ln(x+y)\leqslant A(x^2+y^2)$$

在第一象限上成立.

3. 求函数 $f(a, b)=\int_0^1(x^2-a-bx)^2\mathrm{d}x$ 的最小值.

4. 设 $f(x, y)=4x^2y-x^4-2y^2$,证明$(0, 0)$是鞍点,但点$(0, 0)$是一元函数 $f(t\cos\theta, t\sin\theta)=g(t)$的极大点.

5. 设 D 为凸域,$f(x, y)$在 $\overline{D}$ 上连续,在边界上为常数,且在 D 内可微,试证明 D 内一定有一函数的临界点.

6. 设 $u(x, y)$在 $x^2+y^2\leqslant1$ 上连续,在 $x^2+y^2<1$ 上满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u,$$

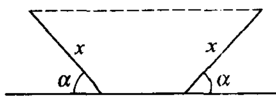
且在 $x^2+y^2=1$ 上 $u(x, y)>0$,试证明

(1) 当 $x^2+y^2\leqslant1$ 时,$u(x, y)\geqslant0$;

(2) 当 $x^2+y^2\leqslant1$ 时,$u(x, y)>0$.

(提示:(2)的证明利用(1)以及函数 e^x)

7. 设有一块铁片,宽 $b=24$cm,再把它的两边折起做成一个槽,使其容积最大,试问每边的倾角 α 和折起的长度 x.



(第 7 题)

8. 一个边长为 x, y, z(cm)的长方体包裹,只有当 $2(x+y)+z\leqslant 100$(cm)时才能邮寄出.试求在此条件下可邮寄包裹的最大体积.

9. 设 $z=z(x, y)$由方程

$$z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0$$

确定,求 $z(x, y)$的极值.

10. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积最大的内接三角形.

11. 设 $f(\boldsymbol{x})$在 $\boldsymbol{x}_0$ 点邻域内属于 $C^{(2)}$ 类, $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$的退化临界点,若在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 $U(\boldsymbol{x}_0; \delta)$内 f 的 Hesse 矩阵 $H_f(\boldsymbol{x})$半正定(半负定),则 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $f(\boldsymbol{x})$的极小(大)点.

12. 令 $g(t)=f(t\cos\theta, t\sin\theta)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$在 $t=0$ 有极小值,问$(0, 0)$点是否是 $f(x, y)$的极小点?

§2 条件极值问题

2.1 极值存在的必要条件——Lagrange 乘子法

在一般极值问题中,对自变量的变化没有任何约束,它们可以在函数的定义域上自由地变化.在实际问题中还有另一类极值问题,它对自变量提出了一些约束条件,限制自变量只能在定义域的某一范围内变化,这类极值问题称为条件极值问题.

如求函数 $z=f(x, y)$在附加条件

$$\varphi(x, y)=0$$

下的极值.从几何上看,是在曲线 $\varphi(x, y)=0$ 上求曲面 $z=f(x, y)$的最高点或最低点.如图 16-3 中作曲面的一族等高线 $f(x, y)=c$,在与曲线 $\varphi(x, y)=0$ 相交的等高线中,我们需要找出一条等高线,使其对应的常数 c 值最大或最小.一般来说,等高线的分布随 c 值单调地变化,与曲线 $\varphi(x, y)=0$ 相切的那条等高线有最值 c.设切点为(x_0, y_0),切点即为约束条件下函数 $f(x, y)$的最大点.那么怎么求切点呢?假设约束曲线

与等高线在(x_0, y_0)点法向量存在. 记为:

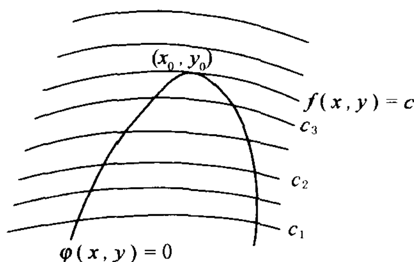


图 16-3

$$\boldsymbol{n}_\varphi = (\varphi_x(x_0, y_0), \varphi_y(x_0, y_0)),$$
$$\boldsymbol{n}_f = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)).$$

由约束曲线与等高线在(x_0, y_0)点相切,得出该点两法向量应成比例

$$\frac{f_x(x_0, y_0)}{\varphi_x(x_0, y_0)} = \frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}.$$

记比例常数为$-\lambda$,于是得到(x_0, y_0)要满足的方程

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi_x(x_0, y_0) = 0, \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi_y(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

当然还要满足约束方程

$$\varphi(x_0, y_0) = 0.$$

上面三个方程就是条件极值点(x_0, y_0)满足的必要条件. 反之,由上面三个方程解出三个未知数(x_0, y_0)和λ(可能有若干组解)是否是条件极值点呢? 这要结合问题的实际意义来判断,或用下面讨论的充分条件来判断. 这种求条件极值点的方法称为 **Lagrange 乘子法**, λ 称为 **Lagrange 乘子**. 为便于记忆,我们引进三个变量 x, y, λ 的函数

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

则条件极值的必要条件,形式上即为求 F 一般极值的必要条件.

上面推导中,偏导数 $\varphi_x^2(x_0, y_0) + \varphi_y^2(x_0, y_0) \neq 0$ 的条件是不可缺少的. 如考虑距离平方函数

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

在条件

$$\varphi(x, y) = (x-1)^3 - y^2 = 0$$

下的最小值. 由图 16-4 看出,在曲线 $\varphi(x, y)=0$ 的尖点 $(1, 0)$ 处函数 $f(x, y)$ 有最小值. 但 $(1, 0)$ 不满足必要条件:

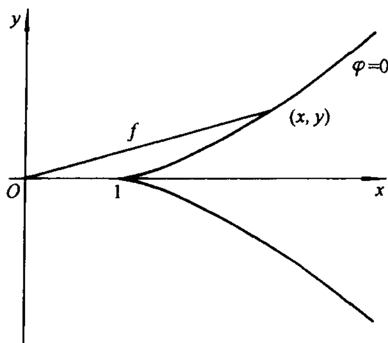


图 16-4

$$f_x(1, 0) + \lambda\varphi_x(1, 0) = \left[2x + 3\lambda(x-1)^2\right]\Big|_{(1, 0)} = 2 \neq 0.$$

这是因为 $\varphi_x(1, 0)=\varphi_y(1, 0)=0$ 的缘故.

对多个自变量与多个约束条件,我们有下面定理.

定理 16.3 设函数 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在约束条件

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (m < n)$$

下有极值点 $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$,函数 f 与约束函数 φ_i $(i=1, 2, \cdots, m)$ 在 P_0 邻域内属于 $C^{(1)}$ 类,且 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0}$$

的秩为 m,则存在常数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$,使 P_0 点满足条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} + \lambda_1 \dfrac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_i} = 0 \\ (i = 1, 2, \cdots, n), \\ \varphi_j(P_0) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m). \end{cases} \tag{①}$$

为了便于记忆,我们引进 $n+m$ 个变量的函数

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \cdots + \lambda_m\varphi_m,$$

则条件极值的必要条件①,形式上化为函数 F 一般极值的必要条件

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \\ \dfrac{\partial F(P_0)}{\partial \lambda_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m). \end{cases} \tag{②}$$

证明 无妨设行列式

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}\right|_{P_0} \neq 0, \tag{③}$$

由隐函数存在定理,在点$(x_{m+1}^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$的邻域 U 上唯一地确定一组隐函数

$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ x_2 = g_2(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots \\ x_m = g_m(x_{m+1}, \cdots, x_n). \end{cases} \tag{④}$$

满足

$$x_k^{(0)} = g_k(x_{m+1}^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}) \quad (k = 1, 2, \cdots, m) \tag{⑤}$$

和

$$\varphi_k[g_1(x_{m+1},\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_{m+1},\cdots,x_n),x_{m+1},\cdots,x_n] \equiv 0$$
$$(k=1, 2, \cdots, m), \tag{⑥}$$

且 $g_k \in C^{(1)}(U)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$.

将④代入目标函数得

$$f[g_1(x_{m+1},\cdots,x_n),\cdots,g_m(x_{m+1},\cdots,x_n),x_{m+1},\cdots,x_n]. \tag{⑦}$$

则$(x_{m+1}^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$是上述函数的通常极值点. 由一般极值的必

要条件和一阶微分形式的不变性,⑦式对变量 x_{m+1}, …, x_n 的微分在($x_{m+1}^{(0)}$, …, $x_n^{(0)}$)点应为零:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m+\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_{m+1}}\mathrm{d}x_{m+1}$$
$$+\cdots+\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n=0. \qquad ⑧$$

再由⑥和一阶微分形式的不变性,得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\dfrac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m+\dfrac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_{m+1}}\mathrm{d}x_{m+1}\\ \qquad +\cdots+\dfrac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\cdots+\dfrac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m+\dfrac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_{m+1}}\mathrm{d}x_{m+1}\\ \qquad +\cdots+\dfrac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n=0.\end{cases} \qquad ⑨$$

⑨式分别乘以 λ_1, λ_2, …, λ_m,然后与⑧式相加,得

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i}+\lambda_1\frac{\partial \varphi_1(P_0)}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_m\frac{\partial \varphi_m(P_0)}{\partial x_i}\right]\mathrm{d}x_i=0. \qquad ⑩$$

由③总可求出数 λ_1, λ_2, …, λ_m,使⑩中 $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, …, $\mathrm{d}x_m$ 的系数为零,而余下和式中由于 $\mathrm{d}x_{m+1}$, …, $\mathrm{d}x_n$ 为自由变量的微分,只要取一个不为零,其余为零,即知⑩中每一 $\mathrm{d}x_i$ 的系数均为零,即得必要条件①. 证毕.

2.2 极值存在的充分条件

在一般极值充分条件讨论中,若 $P_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})$ 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的非退化临界点,根据 Hesse 矩阵 $H_f(P_0)$是正定、负定和不定,得出 P_0 是函数的极小点、极大点和鞍点. 求函数的 Hesse 矩阵可以通过求函数在 P_0 点的二阶微分得到:

$$\mathrm{d}^2 f(P_0)=\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_ix_j}(P_0)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$$

$$= (\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n) H_f(P_0) \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix}.$$

求条件极值的充分条件,归结为求通常极值的充分条件. 设在定理 16.3 的约束方程中能把变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 解成 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的函数,把它们代入目标函数 f,求 f 的二阶微分,得

$$\mathrm{d}^2 f = \sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(P_0)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j + f'_{x_1}(P_0)\mathrm{d}^2 x_1 + \cdots + f'_{x_m}(P_0)\mathrm{d}^2 x_m.$$

然后通过约束条件,求出二阶微分 $\mathrm{d}^2 x_1, \cdots, \mathrm{d}^2 x_m$,代入上式得关于自由变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的二阶微分,根据这个二阶微分是正定、负定、不定,得出 P_0 是极小点、极大点和非极值点. 这样做需要求二阶微分 $\mathrm{d}^2 x_1, \cdots, \mathrm{d}^2 x_m$. 下面介绍不必求二阶微分的方法.

注意到 $F = f + \lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$ 中用隐函数 $x_1, \cdots, x_m$ 代入时,相当于 f 用隐函数代入,和 P_0 是 F 的临界点,即得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}^2 F &= \sum_{i,j=1}^{n} F''_{x_i x_j}(P_0)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j + F'_{x_1}(P_0)\mathrm{d}^2 x_1 \\ &\quad + \cdots + F'_{x_m}(P_0)\mathrm{d}^2 x_m \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} F''_{x_i x_j}(P_0)\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j. \end{aligned} \qquad ①$$

这样只要求出一阶微分 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_m$ 代入上式得到 f 关于自由变量 $x_{m+1}, \cdots, x_n$ 的二阶微分,根据该二阶微分是正定、负定和不定,即可得 P_0 是条件极值的极小点、极大点和鞍点.

例 1 在第一象限上求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在条件 $x + y + z = c$ $(c > 0)$ 下的最大值.

解 作辅助函数

$$F = xyz + \lambda(x + y + z - c),$$

求 F 的一阶偏导数,得方程组

$$\begin{cases} yz+\lambda=0, \\ xz+\lambda=0, \\ xy+\lambda=0. \end{cases}$$

联合约束方程 $x+y+z=c$,求出解为:

$$x=y=z=\frac{c}{3},\quad \lambda=-\frac{c^2}{9}.$$

因连续函数 $f(x, y, z)=xyz$ 在有界闭集 $\{(x, y, z) \mid x+y+z=c,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$ 上取到它的最大、最小值(我们略去方程组在闭集边界上的解,如 $x=y=0,\ z=c,\ \lambda=0$),且最大值在闭集内部达到,而方程组在内部只有一组解. 所以在 $\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$点取到最大值,即三个非负数 x, y, z 满足 $x+y+z=c$ 时,有

$$xyz\leqslant\left(\frac{c}{3}\right)^3.$$

附带我们证明了三个非负数的几何平均小于等于它们的算术平均:

$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3},$$

事实上,令 $a+b+c=\alpha$,考虑函数 $f(x, y, z)=xyz$ 在条件 $x+y+z=\alpha$ 下的最大值,已知满足条件 $x+y+z=\alpha$ 的三个非负数 x, y, z 有

$$xyz\leqslant\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3.$$

特别有

$$abc\leqslant\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3=\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,$$

即
$$\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

若用充分条件来判别极大性,先求二阶微分

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)=\mathrm{d}^2 F\left(\frac{c}{3}, \frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

$$=\frac{2c}{3}(\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

由 $\mathrm{d}z=-(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$,代入上式得

$$\mathrm{d}^2 f\left(\frac{c}{3},\ \frac{c}{3},\ \frac{c}{3}\right)=-\frac{2c}{3}\mathrm{d}x^2-\frac{2c}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{2c}{3}\mathrm{d}y^2,$$

它的 Hesse 矩阵为

$$\begin{bmatrix}-\frac{2c}{3} & -\frac{c}{3}\\ -\frac{c}{3} & -\frac{2c}{3}\end{bmatrix}.$$

因为矩阵是负定的,所以$\left(\frac{c}{3},\ \frac{c}{3},\ \frac{c}{3}\right)$是条件极值的极大点,也是最大点.

例 2 求曲面 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 的最高点与最低点.

解 问题可化为求目标函数 $f(x,\ y,\ z)=z$ 在约束条件 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$ 下的极值. 令

$$F=z+\lambda(2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4),$$

求 F 通常极值的必要条件得

$$\begin{cases}\lambda(4x+2y-2)=0, & ②\\ \lambda(2y+2x-2)=0, & ③\\ 1+\lambda(2z-4)=0, & ④\\ 2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0. & ⑤\end{cases}$$

由④知 $\lambda\neq 0$,可从②,③解出 $x=0,\ y=1$,再从⑤解出 $z_1=1$, $z_2=3$,经④解得 $\lambda_1=\frac{1}{2},\ \lambda_2=-\frac{1}{2}$. 求 F 的二阶微分(λ 视作常数),得

$$\mathrm{d}^2F=4\lambda\mathrm{d}x^2+2\lambda\mathrm{d}y^2+2\lambda\mathrm{d}z^2+4\lambda\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

它在$\left(0,\ 1,\ 1,\ \frac{1}{2}\right)$点的二阶微分为

$$\mathrm{d}^2F=2\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

对应的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

是正定的,所以$(0, 1, 1)$为极小点,即曲面的最低点.

F在$\left(0, 1, 3, -\dfrac{1}{2}\right)$点的二阶微分为

$$\mathrm{d}^2 F = -2\mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

对应的 Hesse 矩阵

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

是负定的,所以$(0, 1, 3)$为极大点,即曲面的最高点.

例 3 设$A>0$, $AC-B^2>0$,求椭圆$Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$的面积.

解 只要求出椭圆的长半轴a和短半轴b. 为此考虑函数

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

在约束条件

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

下的最大值与最小值. 最大值开根即为a,最小值开根即为b.

令

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1),$$

求F的必要条件得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}F'_x = (1-\lambda A)x - \lambda By = 0, \\ \dfrac{1}{2}F'_y = -\lambda Bx + (1-\lambda C)y = 0, \\ -F'_\lambda = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

要前两个方程的方程组有非零解(x, y),其系数行列式必为零:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda A & -\lambda B \\ -\lambda B & 1-\lambda C \end{vmatrix} = 0,$$

即得
$$(AC-B^2)\lambda^2 - (A+C)\lambda + 1 = 0.$$

设上述二次方程的根为 λ_1, λ_2. 由根与系数的关系,知

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \frac{1}{AC-B^2}, \quad \lambda_1+\lambda_2 = \frac{A+C}{AC-B^2},$$

所以 $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$. 无妨设 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$, 对应 λ_i 设方程组有解 (x_i, y_i) $(i=1, 2)$

$$\begin{cases}(1-\lambda_i A)x_i - \lambda_i B y_i = 0, \\ -\lambda_i B x_i + (1-\lambda_i C) y_i = 0.\end{cases}$$

上面方程组中第一式乘以 x_i, 加上第二式乘以 y_i, 得

$$x_i^2+y_i^2 = \lambda_i(Ax_i^2+2Bx_iy_i+Cy_i^2) = \lambda_i \quad (i=1, 2).$$

所以 $a=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\lambda_1}$, $b=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{\lambda_2}$, 椭圆的面积 S 为

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2} = \frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}.$$

注 1. 考虑 $C^{(2)}$ 类函数 $f: D\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\varphi}: D\to\mathbf{R}^m (m<n)$. 求目标函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在约束条件 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 下的极值. 为此作辅助函数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{\lambda}\in\mathbf{R}^m)$, 解方程:

$$F_{\boldsymbol{x}}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f'(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \quad F_{\boldsymbol{\lambda}}'(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

设解为 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$. 要判断它是否极值点,考虑方程 $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0$, 其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}=(\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_m, \mathrm{d}x_{m+1}, \cdots, \mathrm{d}x_n)$, 从方程解出 $\mathrm{d}x_1, \cdots, \mathrm{d}x_m$, 然后代入二次型

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot H_F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

化为关于变量 $(\mathrm{d}x_{m+1}, \cdots, \mathrm{d}x_n)$ 的二次型,根据该二次型是正定、负定、不定,来判断 $\boldsymbol{x}_0$ 是极小、极大和非极值点.

我们从另一角度考察上述问题,注意到 $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\mathbf{0}$ 是方程 $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 所确定的隐函数在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的切空间方程,切空间的维数是 $n-m$, 不妨把 $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 看成切空间中的向量,记作 $\boldsymbol{h}$: $\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}=\mathbf{0}$. 若对于切空间中任一向量 $\boldsymbol{h}$, 有

$$\boldsymbol{h}\cdot H_F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{h} > 0 \ (<0),$$

则 $\boldsymbol{x}_0$ 是条件极值的极小(大)点;若能在切空间找出两向量 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, 使 $\boldsymbol{h}_1\cdot H_F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{h}_1>0$, $\boldsymbol{h}_2\cdot H_F(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{h}_2<0$, 则 $\boldsymbol{x}_0$ 为非极值点.

如例 1 中容易求出切空间 $[1, 1, 1]\boldsymbol{h}=0$ 中向量 $\boldsymbol{h}=(t_1, t_2, -t_1-t_2)(t_1^2+t_2^2\neq 0)$. F 在 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ 点的 Hesse 矩阵为:

$$H_F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)=\begin{bmatrix}0 & \frac{c}{3} & \frac{c}{3}\\ \frac{c}{3} & 0 & \frac{c}{3}\\ \frac{c}{3} & \frac{c}{3} & 0\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{h}\cdot H_F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)\boldsymbol{h}=-\frac{c}{3}[t_1^2+t_2^2+(t_1+t_2)^2]<0$, 故 $\boldsymbol{x}_0=\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)$为极大点.

2. 沿用注 1 中记号, 设 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$, 行列式 $\left.\frac{\partial(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_m)}\right|_{x_0}\neq0$,若对 $\forall\,p=m+1,\cdots,n$,成立

$$(-1)^m\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_1\partial x_p} & \frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial^2F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_1\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial^2F(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_p^2} & \frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_p} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_p}\\ \frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_p} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ \frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_p} & & & \end{bmatrix}$$

>0,

则 $\boldsymbol{x}_0$ 为极小点;若$(-1)^m$ 改为$(-1)^p$ 时上式成立,则 $\boldsymbol{x}_0$ 为极大点.

例 1 中如采用此判别法,要计算两个行列式:

$$(-1)^2\begin{vmatrix}0 & \frac{c}{3} & 1\\ \frac{c}{3} & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{2c}{3}>0,$$

$$(-1)^3\begin{vmatrix}0 & \frac{c}{3} & \frac{c}{3} & 1\\ \frac{c}{3} & 0 & \frac{c}{3} & 1\\ \frac{c}{3} & \frac{c}{3} & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{c}{3} & -\frac{c}{3} & 0 & 1\\ \frac{c}{3} & 0 & -\frac{c}{3} & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{c}{3} & -\frac{c}{3} & 0 \\ \frac{c}{3} & 0 & -\frac{c}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{c^2}{3}>0,$$

所以 $\boldsymbol{x}_0$ 为极大点.

思考练习 解答下列问题:

1. 试求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与点(a, b, c)之间的最短距离.

2. 试求椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 到直线 $x+y-4=0$ 之间的最长与最短距离.

3. 试证明表达式

$$\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{ex^2+2fxy+gy^2} \quad (eg-f^2>0)$$

的最大值等于方程

$$(ac-b^2)-\lambda(ag-2bf+c)+\lambda^2(eg-f^2)=0$$

中较大的根 λ.(提示:表达式在点(x, y)上的值与在点(tx, ty)上的值相同,故可对分母作一限制)

4. 计算表达式 $\frac{x^2+6xy+3y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的最大值.

5. 求圆的外切 n 边形中面积最小者.

6. 试求包含椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内体积最大的长方体.

7. 在第一象限中求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面:

(1) 使它与坐标平面围成的四面体体积最小;

(2) 使它与坐标轴的截距最小.

8. 平面上给定边长为 a, b, c 的三角形,在其上作高为 h 的锥体,求使其侧面积最小者.

9. 证明周长一定的四边形中,正方形面积最大.

10. 要制作一个中间是圆柱,两头为相同的正圆锥的空浮

标,它的体积是一定的,要使所用材料最省,问圆柱和圆锥尺寸应成何比例?

11. (1) 试求 $f(x, y, z)=x^a y^b z^c$ 在条件 $x+y+z=1$ 下的最大值,其中 a, b, c 是正常数;

(2) 从(1)的结果证明对六个正数有不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c \leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}.$$

12. 用注 1 和注 2 的方法判别例 2 中 $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)=\left(0, 1, 1, \frac{1}{2}\right)$ 和 $\left(0, 1, 3, -\frac{1}{2}\right)$ 的极值性.

§3 最小二乘法

在生产实践中,常常需要根据通过实际测量而得到的一系列数据

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n) \qquad ①$$

来找出变量 x 和 y 之间的函数关系,这种求函数的方法通常也叫配曲线或找经验公式. 我们把 $(n+1)$ 个数据画在平面上得 $n+1$ 个点,如果这些点分布在一直线附近,则认为要找的经验公式是一次函数(图 16-5);如果这些点分布在一抛物线附近,则认为要找的经验公式为二次函数(图 16-6).

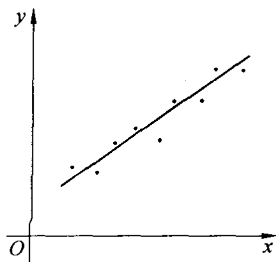


图 16-5

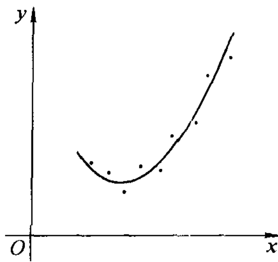


图 16-6

一般来说,若要找的经验公式为 $m(m<n)$ 次多项式:

$$y = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

怎么根据数据①来合理地确定系数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 呢?

我们用 δ_i 表示经验公式在 x_i 点的值与实测值 y_i 的偏差:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_m x_0^m - y_0 = \delta_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_m x_1^m - y_1 = \delta_1, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_m x_n^m - y_n = \delta_n. \end{cases} \qquad ②$$

记

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

则②式可写成向量形式:

$$\boldsymbol{Ga} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\delta}, \qquad ③$$

这里我们不用使各个偏差的代数和 $\sum_{i=0}^{n}\delta_i$ 最小的方法来确定 $a_0, a_1, \cdots, a_m$,因为每个偏差有正有负,代数和中偏差可能互相抵消,这样虽然偏差代数和很小,却不能保证各个偏差都很小.所以我们用使各个偏差平方和为最小的方法来确定 $a_0, a_1, \cdots, a_m$,这样可以保证每个偏差都很小,也就是求函数

$$\begin{aligned} f(a_0, a_1, \cdots, a_m) = f(\boldsymbol{a}) &= \sum_{i=0}^{n}\delta_i^2 = (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\delta}) \\ &= (\boldsymbol{Ga} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{Ga} - \boldsymbol{y}) \end{aligned} \qquad ④$$

最小值的方法来确定 $a_0, a_1, \cdots, a_m$,称此方法为最小二乘法.

由向量函数运算法则得

$$f'(\boldsymbol{a}) = 2(\boldsymbol{Ga}-\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{G},$$

令 $f'(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}^T$(表示零向量的转置),得

$$\boldsymbol{G}^T(\boldsymbol{Ga}-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0},$$

或

$$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Ga} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{y}.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ 可逆,由上式求出解

$$\boldsymbol{a}^* = (\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G})^{-1}\cdot\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{y}. \qquad ⑤$$

我们来说明矩阵 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ 有逆矩阵,和解 $\boldsymbol{a}^*$ 确实使 $f(\boldsymbol{a})$ 取最小值.

(1) 由于 x_i 两两不同,知矩阵 $\boldsymbol{G}$ 满秩,所以 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{Ga}\neq\boldsymbol{0}$,于是有

$$(\boldsymbol{Ga})^T(\boldsymbol{Ga}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Ga} > 0,$$

这表明矩阵 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ 为正定矩阵,故有 $\det\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}>0$,因而矩阵 $\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}$ 有逆矩阵存在;

(2) 要说明 $f(\boldsymbol{a})\geqslant f(\boldsymbol{a}^*)$,为此将函数 f 在 $\boldsymbol{a}^*$ 点展成 Taylor 公式

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{Ga}^*+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{Ga}^*+\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)-\boldsymbol{y})\\
&=(\boldsymbol{Ga}^*-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{Ga}^*-\boldsymbol{y})+2(\boldsymbol{Ga}^*-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*))\\
&\quad+(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*),\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*))\\
&=f(\boldsymbol{a}^*)+2(\boldsymbol{Ga}^*-\boldsymbol{y})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)\\
&\quad+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)\\
&=f(\boldsymbol{a}^*)+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)^T\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^*)\geqslant f(\boldsymbol{a}^*).
\end{aligned}$$

注意矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和向量 $\boldsymbol{y}$ 是已知的,这样由⑤求得最小二乘法解 $\boldsymbol{a}^*$,事实上

$$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} n+1 & \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \cdots & \cdots & \sum x_i^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \cdots & \cdots & \sum x_i^{2m} \end{pmatrix}$$

$$G^{T}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\\ \vdots\\ \sum x_i^m y_i\end{pmatrix},$$

其中求和号 $\sum$ 是 $\sum\limits_{i=0}^{n}$ 的简写.

特别当 $m=1$ 时,求得解为

$$\begin{pmatrix}a_0^*\\ a_1^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}n+1 & \sum x_i\\ \sum x_i & \sum x_i^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum y_i\\ \sum x_iy_i\end{pmatrix},$$

所以

$$a_0^*=\frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2)-(\sum x_i)(\sum x_iy_i)}{(n+1)(\sum x_i^2)-(\sum x_i)^2},$$

$$a_1^*=\frac{(n+1)(\sum x_iy_i)-(\sum x_i)(\sum y_i)}{(n+1)(\sum x_i^2)-(\sum x_i)^2}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 在平面上已知 n 个点 (x_i, y_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$,设直线 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 与已知点的偏差平方和为最小,试证明

$$p=\bar{x}\cos\alpha+\bar{y}\sin\alpha,\quad \tan\alpha=\frac{2(\bar{x}\cdot\bar{y}-\overline{xy})}{[\overline{x^2}-(\bar{x})^2][\overline{y^2}-(\bar{y})^2]},$$

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i,\quad \overline{x^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2,$$

$$\overline{y^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2,\quad \overline{xy}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,$$

$$\overline{x^2}-(\bar{x})^2\neq 0,\quad \overline{y^2}-(\bar{y})^2\neq 0.$$

2. 已知 $u=Ax+By+Cz$,现测得一组数据 (x_i, y_i, z_i, u_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$,利用最小二乘法求得数 A、B、C 所满足的三元一次方程组.

第十七章 含参变量的积分

除用函数级数表示函数外，另一种表示函数的工具就是用含有参变量的积分。这种形式的函数在理论和应用上都有重要作用，如许多有用的特殊函数就是用这种形式表示的。这章主要讨论含参变量积分所确定的函数的连续性、可微性和可积性，并讨论两个特殊函数。

§1 含参变量的定积分

设函数 $f(x, y)$ 在矩形 D: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$ 上连续，变量 x 固定为 $[a, b]$ 上的一点 x_0 时，函数 $f(x_0, y)$ 就成为一个变量 y 的函数，因此就有一个数值

$$\int_c^d f(x_0, y)\mathrm{d}y$$

与 x_0 对应，根据函数定义，我们确定了一个区间 $[a, b]$ 上的函数

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y,$$

称它为**含参变量的积分**，称 x 为**参变量**.

引理 17.1 设 $f(x, y)\in C(D)$，令

$$F(x, z) = \int_c^z f(x, y)\mathrm{d}y \quad (c\leqslant z\leqslant d),$$

则 $F(x, z)\in C(D)$.

证明 任给 $(x_0, z_0)\in D$、$\varepsilon>0$，因函数 $f(x, y)$ 在有界闭矩形 D 上连续，所以它在 D 上有界，设

$$|f(x, y)| \leqslant M, \ (x, y) \in D.$$

又函数在 D 上一致连续,故存在 $\delta_1>0$,当 $(x, y) \in D$,且 $|x-x_0|<\delta_1$ 时,就有

$$|f(x, y)-f(x_0, y)|<\frac{\varepsilon}{2(d-c)}.$$

取 $\delta=\min\left(\delta_1, \frac{\varepsilon}{2M}\right)$,则当 $(x, z) \in D$,且 $|x-x_0|<\delta$, $|z-z_0|<\delta$ 时,有

$$\begin{aligned}|F(x, z)-F(x_0, z_0)| &\leqslant \left|\int_c^{z_0}[f(x, y)-f(x_0, y)]\mathrm{d}y\right| \\ &\quad +\left|\int_{z_0}^{z} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2(d-c)}(d-c)+M \cdot \frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明 $F(x, z)$ 在 (x_0, z_0) 点连续. 由 (x_0, z_0) 的任意性,所以 $F(x, z) \in C(D)$. 证毕.

定理 17.1 设 $f(x, y) \in C(D)$,则 $I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \in C[a, b]$.

事实上,由引理 17.1 和 $I(x)=F(x, d)$,即可看出定理结论成立.

这结论也可写成:

$$\lim_{x \to x_0}\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y=\int_c^d \lim_{x \to x_0} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

这表明取极限与求积分的运算顺序可以交换.

定理 17.2 设 $f(x, y) \in C(D)$, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[a, b]$,且有

$$c \leqslant \varphi(x) \leqslant d, \quad c \leqslant \psi(x) \leqslant d.$$

则 $J(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \in C[a, b]$.

证明 因

$$J(x)=\int_c^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y-\int_c^{\varphi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \xlongequal{\text{def}} J_2(x)-J_1(x),$$

这里 $J_2(x)$ 和 $J_1(x)$ 分别是引理 17.1 中的 $F(x, z)$ 与 $z=\psi(x)$ 和 $z=\varphi(x)$ 的复合. 由引理和复合函数的连续性,知 $J_i(x)\in C[a, b](i=1, 2)$,所以 $J(x)\in C[a, b]$. 证毕.

定理 17.3 设 $f(x, y)$, $f_x(x, y)\in C(D)$,则 $I(x)\in C^{(1)}[a, b]$,且

$$I'(x)=\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y,$$

即求导与求积分运算顺序可以交换.

证明 设 x, $x+\Delta x\in[a, b]$,那么

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}\mathrm{d}y.$$

应用 Lagrange 中值定理,得

$$\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d f_x(x+\theta\Delta x, y)\mathrm{d}y \qquad (0<\theta(x, y)<1).$$

任给 $\varepsilon>0$,由 $f_x(x, y)$ 在 D 上一致连续,故存在 $\delta>0$,当 $|x'-x|<\delta$ 时,有

$$|f_x(x', y)-f_x(x, y)|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

所以当 $|\Delta x|<\delta$ 时,就有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}-\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y\right|\\ =&\left|\int_c^d[f_x(x+\theta\Delta x, y)-f_x(x, y)]\mathrm{d}y\right|\\ \leqslant&\int_c^d\frac{\varepsilon}{d-c}\mathrm{d}y=\varepsilon.\end{aligned}$$

由导数定义,即得

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{I(x+\Delta x)-I(x)}{\Delta x}=\int_c^d f_x(x, y)\mathrm{d}y,$$

再由定理 17.1 知 $I'(x)\in C[a, b]$. 证毕.

定理 17.4 设 $f(x, y)$, $f_x(x, y)\in C(D)$, $\psi(x)$、$\psi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微,且

$$c \leqslant \psi(x) \leqslant d, \quad c \leqslant \varphi(x) \leqslant d.$$

则 $J(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$ 在$[a, b]$上可微,且

$$J'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y)\mathrm{d}y + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x).$$

证明 注意到 $J(x)$是函数

$$F(x, u) - F(x, v) = \int_v^u f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^u f(x, y)\mathrm{d}y - \int_c^v f(x, y)\mathrm{d}y$$

与 $u=\psi(x)$, $v=\varphi(x)$的复合. 由定理 17.3 与变上限求导定理得

$$F_x(x, u) = \int_c^u f_x(x, y)\mathrm{d}y, \quad F_u(x, u) = f(x, u).$$

再由引理知 $F_x(x, u)\in C(D)$,显然有 $F_u(x, u)\in C(D)$,因此 $F(x, u)$在 D 上可微. 同理 $F(x, v)$也在 D 上可微. 根据复合函数求导法则得

$$\begin{aligned} J'(x) &= \left[F_x(x, u) + F_u(x, u)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]_{u=\psi(x)} - \left[F_x(x, v) + F_v(x, v)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right]_{v=\varphi(x)} \\ &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f_x(x, y)\mathrm{d}y + f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x). \end{aligned}$$

证毕.

定理 17.5 设 $f(x, y)\in C(D)$,则对任意 $z\in[a, b]$,有

$$\int_a^z\left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d\left[\int_a^z f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

取 $z=b$,即得

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d\left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

这说明两个求积分顺序可以交换.

证明 要证明两个 z 的函数恒等,先看其导数. 由定理

17.1 知 $\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y \in C[a, b]$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\int_a^z\left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right)=\int_c^d f(z, y)\mathrm{d}y.$$

又由引理 17.1 和定理 17.3 知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_c^d\left[\int_a^z f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_c^d\left(\frac{\partial}{\partial z}\int_a^z f(x, y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d f(z, y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

既然两函数的导数恒等,因此

$$\int_a^z\left[\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x-\int_c^d\left[\int_a^z f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \equiv \text{常数},$$

令 $z=a$ 知此常数为零,故定理结论成立. 证毕.

例 1 设

$$u(x) = \int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

试证 $u(x)$ 满足微分方程

$$x^2u''(x) + xu'(x) + (x^2 - n^2)u(x) = 0.$$

证明 在矩形 $|x|\leqslant M$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 上应用定理 17.3 得

$$\begin{aligned}u'(x) &= \int_0^\pi \sin(n\theta - x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta & ① \\ &= [-\cos\theta\sin(n\theta - x\sin\theta)]\Big|_0^\pi \\ &\quad + \int_0^\pi \cos\theta\cos(n\theta - x\sin\theta)(n - x\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)(n - x\cos\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta, & ②\end{aligned}$$

对①再次应用定理 17.3 得

$$u''(x) = -\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta, \qquad ③$$

由 M 的任意性, ②与③在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立. 因此可得

$$\begin{aligned}&x^2u''(x) + xu'(x) + (x^2 - n^2)u(x) \\ &= \int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)[-x^2\sin^2\theta + x\cos\theta(n - x\cos\theta)\end{aligned}$$

$$+(x^2-n^2)]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\int_0^\pi n\cos(n\theta-x\sin\theta)(n-x\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=-n\sin(n\theta-x\sin\theta)\big|_0^\pi=0.$$

例 2 设 $0<a<b$,求积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x.$$

解 因

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\mathrm{d}y,$$

所以有

$$I=\int_0^1\left[\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

由于函数 x^y 在矩形 $0\leqslant x\leqslant 1,\ a\leqslant y\leqslant b$ 上连续,根据定理 17.5 得

$$I=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_a^b\frac{x^{1+y}}{1+y}\bigg|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+y}=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

例 3 设 $f(x)\in C^{(n)}(-\infty,+\infty)(n\geqslant 1)$,令

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\neq a,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

求证 $g(x)\in C^{(n-1)}(-\infty,+\infty)$,并求 $g^{(n-1)}(a)$.

证明 因

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

$$=(x-a)\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y,$$

所以

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y\quad(x\neq a).$$

当 $x=a$ 时,上式右端为 $f'(a)$,故有

$$g(x)=\int_0^1 f'[a+y(x-a)]\mathrm{d}y.$$

这样 $g(x)$ 用一个式子表示出来,由定理 17.3 知 $g(x)\in C^{(n-1)}$ $(-\infty,+\infty)$. 特别有

$$g^{(n-1)}(x)=\int_0^1 y^{n-1}f^{(n)}[a+y(x-a)]\mathrm{d}y,$$

所以有

$$g^{(n-1)}(a)=f^{(n)}(a)\int_0^1 y^{n-1}\mathrm{d}y=\frac{f^{(n)}(a)}{n}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y$. (2) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^2 y^2\cos(xy)\mathrm{d}y$.

(3) $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$.

2. 设 $f(x)$ 连续, $F(x)=\int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$,求 $F^{(n)}(x)$.

3. 设 $f\in C^{(2)}((-\infty,\infty))$, $g\in C^{(1)}((-\infty,\infty))$,令

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+at)+f(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(y)\mathrm{d}y,$$

证明当 $t\geqslant 0$, $-\infty<x<\infty$ 时, $u(x,t)$、$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 以及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 皆连续,且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,0)=f(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=g(x).$$

4. 求 $F'(x)$,其中 $F(x)$ 为

(1) $F(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$.

(2) $F(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$.

(3) $F(x)=\int_0^x\int_{t^2}^{x^2}f(t,s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$.

(4) $F(x)=\int_0^x\int_t^x \mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s\mathrm{d}t$.

5. 设 $F(x)=\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta}\cdot\cos(x\cdot\sin\theta)\,d\theta$，试证明 $F(x)\equiv 2\pi$.

6. 利用积分公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}d\theta=1,\ (0<r<1),$$

试求积分($r>0$, $r\neq 1$)

$$I(r)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)\,d\theta$$

的值.

7. 设 $f_y(x, y)$在(x_0, y_0)点的一个邻域内是连续的，试证明方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, y)\,dt$$

在 $x=x_0$ 的某个邻域内把 y 确定为 x 的函数.

8. φ_i 是实轴上连续函数，在$(2^{-i}, 2^{1-i})$外为零，在区间$(2^{-i}, 2^{1-i})$上是高为 2^{i+1} 等腰三角形的两边($i=1, 2, 3, \cdots$). 令 D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 和 D 上二元函数

$$f(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\varphi_i(y).$$

证明(1) $f(x, y)$关于 x、y 连续；

(2) $\int_0^1 f(x, y)\,dy=\varphi_1(x)$, $\int_0^1 f(x, y)\,dx=0$;

(3) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)\,dy=1$, $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx=0$.

§2　含参变量的反常积分

2.1　一致收敛的概念及其判别法

设函数 $f(x, y)$在无界矩形 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y<+\infty$上定义，若对每一个 $x\in[a, b]$，无穷积分

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)\,dy \qquad ①$$

都收敛,则积分值可以看成是定义在$[a, b]$上的函数,记为$I(x)$.我们要讨论函数$I(x)$的连续性,可积性和可微性等性质.类似于无穷级数的和函数性质的讨论,容易看出需要有积分①的一致收敛概念.

定义 17.1 若任给$\varepsilon>0$,存在$A_0=A_0(\varepsilon)>c$,当$A>A_0$时,对一切$x\in[a, b]$,成立

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

则称$\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$关于$x$在$[a, b]$上**一致收敛**.

这里x取值区间$[a, b]$可以代之以(a, b)、$(a, +\infty)$,甚至一般的集合E,就有无穷积分关于x在E上一致收敛概念.类似可定义含参变量瑕积分的一致收敛性.若函数$f(x, y)$在$y=c$, $x\in[a, b]$邻域内无界,则称$\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$为含参变量$x$的瑕积分,如$\int_0^1 \frac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$为$x\in[0, 1]$的瑕积分,对瑕积分$\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$关于$x$在$[a, b]$上一致收敛定义为:任给$\varepsilon>0$,存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$,当$c<c'<c+\delta$时,对一切的$x\in[a, b]$,成立

$$\left|\int_c^{c'} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon,$$

下面我们只讨论无穷积分情形.关于无穷积分的每一个定理,相应地就有一个关于瑕积分的定理.

一致收敛原理 无穷积分①在E上一致收敛的充要条件是:任给$\varepsilon>0$,存在$A_0>c$,当$A, A'>A_0$时,对一切的$x\in E$,有

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

证明留给读者.

Weierstrass 判别法 设有连续函数$F(y)$,使

$$|f(x, y)|\leqslant F(y)\quad(x\in E, c\leqslant y<+\infty),$$

且积分

$$\int_c^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y < +\infty. \qquad ②$$

则无穷积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在集合 E 上一致收敛.

证明 任给 $\varepsilon>0$,由②和无穷积分的收敛原理存在 $A_0>0$,当 A、$A'>A_0$ 时,有

$$\left|\int_A^{A'} F(y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

所以当 A, $A'>A_0$ 时, $x\in E$,就有

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \left|\int_A^{A'} |f(x, y)|\mathrm{d}y\right| \leqslant \left|\int_A^{A'} F(y)\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

再由一致收敛的收敛原理,知无穷积分①在 E 上一致收敛. 证毕.

例 1 求证积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\cos\alpha x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(-\infty, +\infty)$上是一致收敛的,其中 k 为正常数.

证明 因

$$|\mathrm{e}^{-kx}\cos\alpha x| \leqslant \mathrm{e}^{-kx}$$

和 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x < +\infty$, 所以由 Weierstrass 判别法,知无穷积分关于 α 在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛.

能用 Weierstrass 判别法判别一致收敛的参变积分,事实上一定是绝对一致收敛的. 对非绝对一致收敛的参变积分,需用下面判别法.

Dirichlet 判别法 设 (1)存在正常数 M,对任意的 $x\in E$,当 $A\geqslant c$ 时,有

$$\left|\int_c^{A} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M;$$

(2) 对任意固定的 $x\in E$, $g(x, y)$是 y 的单调函数,当 $y\to+\infty$ 时, $g(x, y)$关于 $x\in E$ 一致趋于零($\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0>c$,当 $y>A_0$ 时, $\forall x\in E$,有$|g(x, y)|<\varepsilon$),则积分

$$\int_c^{+\infty} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y \tag{3}$$

关于 x 在 E 上一致收敛.

证明　任给 $\varepsilon>0$,由条件(2),存在 $A_0=A_0(\varepsilon)$,当 $y>A_0$ 时,对一切 $x\in E$,有

$$|g(x, y)|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

所以当 A、$A'>A_0$ 时,应用第二积分中值定理得

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y\right| &\leqslant \left|g(x, A)\int_A^{\xi} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \\ &\quad + \left|g(x, A')\int_{\xi}^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M+\frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M=\varepsilon.\end{aligned}$$

由一致收敛的收敛原理,知③关于 x 在 E 上一致收敛. 证毕.

Abel 判别法　设 (1) 积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 关于 x 在 E 上一致收敛; (2) 函数 $g(x, y)$ 对任意固定的 $x\in E$ 是 y 的单调函数,且存在常数 $M>0$,对任意的 $y\geqslant c$ 和 $x\in E$,有

$$|g(x, y)|\leqslant M.$$

则积分③关于 x 在 E 上一致收敛.

证明　任给 $\varepsilon>0$,由条件(1),存在 $A_0=A_0(\varepsilon)>c$,当 A, $A'>A_0$ 时,有

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\frac{\varepsilon}{2M},\quad x\in E,$$

所以当 A, $A'>A_0$ 和 $x\in E$ 时,应用第二积分中值定理得

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x, y)g(x, y)\mathrm{d}y\right| &\leqslant \left|g(x, A)\int_A^{\xi} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \\ &\quad + \left|g(x, A')\int_{\xi}^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y\right| \\ &\leqslant M\frac{\varepsilon}{2M}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由一致收敛的收敛原理,积分③关于 x 在 E 上一致收敛. 证毕.

例 2 给定积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$, 证明:
(1) 固定 $k\in[0, +\infty)$,积分关于 α 在 $|\alpha|\geqslant\delta(\delta>0)$ 上一致收敛; (2) 固定 $\alpha\neq 0$,积分关于 k 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

证明 (1) 因

$$\left|\int_0^A \sin\alpha x\,dx\right| = \left|\frac{1-\cos\alpha A}{\alpha}\right| \leqslant \frac{2}{\delta};$$

函数 $\frac{1}{x}e^{-kx}$ 当 $x\to+\infty$ 时单调一致趋于零,所以由 Dinchlet 判别法,知积分关于 α 在 $|\alpha|\geqslant\delta$ 上一致收敛.

(2) 因积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

收敛(也可说关于参数 k 一致收敛),函数 e^{-kx} 固定 $k\in[0, +\infty)$ 关于 x 单调,且当 $k\geqslant 0$, $x\geqslant 0$ 时,有

$$|e^{-kx}|\leqslant 1,$$

所以由 Abel 判别法,知积分关于 k 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

思考练习 解答下列问题:

1. 证反常积分①关于 x 在 E 上一致收敛,其充要条件是:对任一趋于 $+\infty$ 的增序列 $\{A_n\}$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}^{A_{n+1}} f(x, y)dy$ $(A_1 = c)$ 关于 x 在 E 上一致收敛.

2. 证瑕积分 $\int_0^1 \frac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}dy$ 关于 x 在 $[0, 1]$ 上一致收敛,$\int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{x^2+y^2}dy$ 关于 x 在 $(0, 1)$ 上不一致收敛.

2.2 含参变量的无穷积分的性质

定理 17.6 设 $f(x, y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y<+\infty$ 上连续,积分

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)dy$$

关于 x 在 $[a, b]$ 上一致收敛,则 $I(x)\in C[a, b]$.

证明 任给 $\varepsilon>0$,由无穷积分一致收敛,总存在 $A_0>c$,当 $A>A_0$ 和 $x\in[a, b]$ 时,有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon. \qquad ①$$

固定 A,应用定理 17.1,存在 $\delta=\delta(x)>0$,当 $|\Delta x|<\delta$ 时,有

$$\left|\int_c^A f(x+\Delta x, y)\mathrm{d}y-\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\varepsilon.$$

所以,当 $|\Delta x|<\delta$ 时,由上式和①得

$$|I(x+\Delta x)-I(x)|\leqslant\left|\int_c^A f(x+\Delta x, y)\mathrm{d}y-\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right|$$
$$+\left|\int_A^{+\infty} f(x, \Delta x, y)\mathrm{d}y\right|$$
$$+\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<3\varepsilon,$$

根据连续定义,知 $I(x)$ 在 x 上连续. 由 x 的任意性知 $I(x)\in C[a, b]$. 证毕.

例 1 求证积分

$$I(x)=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y$$

在 $x>0$ 上不一致收敛.

证明 显然 $I(0)=0$. 当 $x>0$ 时,作 $xy=t$ 的变换,得

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1.$$

由于 $I(x)$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ 上不连续,根据定理 17.6 知积分在 $x\geqslant 0$ 上不一致收敛. 因而积分在 $x>0$ 上不一致收敛.

注 此例也说明,当积分变换含有参变量时,由变换后积分的一致收敛,推不出原积分一致收敛.

定理 17.7 设 $f(x, y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $y\geqslant c$ 上连续,积分

$$I(x)=\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

关于 $x\in[a, b]$ 一致收敛,则有

$$\int_a^b \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty} \left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

证明 由定理 17.6,知上式左端为一数值

$$\int_a^b I(x)\mathrm{d}x.$$

又 $\forall \varepsilon>0$, $\exists A_0$,当 $A>A_0$ 时,对任意的 $x\in[a, b]$,有

$$\left|\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y - \int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

上式对 x 积分得

$$\left|\int_a^b \left[\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x - \int_a^b \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

再应用定理 17.5 得

$$\left|\int_c^A \left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y - \int_a^b \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

根据反常积分收敛定义,即得

$$\int_c^{\infty} \left[\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.\text{ 证毕.}$$

定理 17.8 设 $f(x, y)$, $f_x(x, y)$在 $a\leqslant x\leqslant b$, $y\geqslant c$ 上连续,积分 $\int_c^{+\infty} f(x_0, y)\mathrm{d}y$ $(x_0\in[a, b])$收敛,积分

$$\varphi(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)\mathrm{d}y$$

关于 x 在$[a, b]$上一致收敛到 $\varphi(x)$. 则

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

关于 x 在$[a, b]$上一致收敛到 $I(x)$. 且

$$I'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty} f_x(x, y)\mathrm{d}y.$$

证明 由微积分基本定理得

$$f(x, y) - f(x_0, y) = \int_{x_0}^x f_x(t, y)\mathrm{d}t. \qquad ②$$

上式对 y 从 A 到 A'积分,并利用定理 17.5 可得

$$\int_A^{A'} f(x, y)\mathrm{d}y - \int_A^{A'} f(x_0, y)\mathrm{d}y = \int_A^{A'} \left[\int_{x_0}^x f_x(t, y)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}y$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left[\int_{A}^{A'} f_x(t, y) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}t. \quad ③$$

任给 $\varepsilon>0$,由定理的假设,存在 $A_0(\varepsilon)>c$,当 A、$A'>A_0$ 时,有

$$\left| \int_{A}^{A'} f_x(t, y) \mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall t \in [a, b]$$

和

$$\left| \int_{A}^{A'} f(x_0, y) \mathrm{d}y \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以当 A、$A'>A_0$ 时,对任意的 $x\in[a, b]$,由③得

$$\left| \int_{A}^{A'} f(x, y) \mathrm{d}y \right| \leqslant \left| \int_{A}^{A'} f(x_0, y) \mathrm{d}y \right| + \left| \int_{x_0}^{x} \left[\left| \int_{A}^{A'} f_x(t, y) \mathrm{d}y \right] \right| \mathrm{d}t \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon.$$

根据一致收敛原理,知积分 $\int_{c}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$ 关于 x 在 $[a, b]$ 上一致收敛,记其值为 $I(x)$.

对②式关于变量 y 从 c 到 $+\infty$ 积分得

$$\int_{c}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y - \int_{c}^{+\infty} f(x_0, y) \mathrm{d}y = \int_{c}^{+\infty} \left[\int_{x_0}^{x} f_x(t, y) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}y.$$

应用定理 17.7 可得

$$I(x) - I(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

由定理 17.6 知 $\varphi(t)\in C[a, b]$,所以 $I(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微,且 $I'(x)=\varphi(x)$,或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{c}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y \right) = \int_{c}^{+\infty} f_x(x, y) \mathrm{d}y, \text{证毕.}$$

定理 17.9 设 $f(x, y)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$, $y\geqslant c$ 上连续且非负,对任意的 $x\in[a, b]$,积分

$$I(x) = \int_{c}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d}y$$

收敛,且 $I(x)\in C[a, b]$. 则上述积分关于 x 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

证明 用反证法. 假设积分不一致收敛,则存在 $\varepsilon_0>0$ 和趋

于$+\infty$的递增列$\{A_n\}$和$x_n\in[a, b](n=1, 2, \cdots)$,使得

$$I(x_n)-\int_c^{A_n} f(x_n, y)\mathrm{d}y=\int_{A_n}^{+\infty} f(x_n, y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0.$$

无妨设$x_n\to x_0\in[a, b]$(否则用$\{x_n\}$的收敛子列代替之). 固定m,当$n\geqslant m$时,由$f(x, y)\geqslant 0$和$\{A_n\}$的递增性,得

$$I(x_n)-\int_c^{A_m} f(x_n, y)\mathrm{d}y\geqslant I(x_n)-\int_c^{A_n} f(x_n, y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0.$$

对式子

$$I(x_n)-\int_c^{A_m} f(x_n, y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0,$$

令$n\to+\infty$取极限,得

$$I(x_0)-\int_c^{A_m} f(x_0, y)\mathrm{d}y\geqslant\varepsilon_0.$$

上式对任意自然数m成立,这与假设积分$\int_c^{+\infty} f(x_0, y)\mathrm{d}y$收敛到$I(x_0)$矛盾. 故反证法假设不成立,即积分在$[a, b]$上一致收敛. 证毕.

例 2 求证积分

$$I(x)=\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x^2y^2}\mathrm{d}y$$

在$x\geqslant 0$上一致收敛.

证明 先证在$[0, 1]$上一致收敛. 因

$$I(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \sqrt{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

在$[0, 1]$上连续,被积函数$x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-x^2y^2}$在$0\leqslant x\leqslant 1$, $y\geqslant 0$上连续、非负,所以由定理 17.9 知积分在$[0, 1]$上一致收敛.

再证在$[1, +\infty]$上一致收敛. 因

$$\mathrm{e}^{x^2y^2}=1+x^2y^2+\cdots\geqslant x^2y^2,$$

所以

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\mathrm{e}^{x^2y^2}}\leqslant\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2y^2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}y^2}\leqslant\frac{1}{y^2}\quad(y>0, x\geqslant 1),$$

$$\int_A^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} dy \leqslant \int_A^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{A},$$

任给 $\varepsilon>0$,取 $A_0=\dfrac{1}{\varepsilon}$,当 $A>A_0$ 时,对任意 $x\in[1,\ +\infty)$,有

$$\int_A^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} dy \leqslant \frac{1}{A} < \varepsilon.$$

按定义积分在 $[1,\ +\infty)$ 上一致收敛.

总之,积分在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛.

又证 固定 $y\in(0,\ +\infty]$,对一元函数

$$g(x) = x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2}$$

在 $[0,\ +\infty)$ 上求其最大值,容易求出最大值为:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant +\infty} g(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{y^{\frac{3}{2}}},$$

其中常数 $C=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{4}}$,所以当 $0\leqslant x\leqslant +\infty$ 时,有

$$x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} \leqslant \frac{C}{y^{\frac{3}{2}}}.$$

又积分 $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{C}{y^{\frac{3}{2}}} dy$ 收敛,故积分

$$\int_1^{\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} dy$$

关于 x 在 $[0,\ +\infty)$ 上一致收敛,而

$$\int_0^1 x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} dy$$

为通常积分,最后得积分

$$\int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x^2y^2} dy$$

关于 x 在 $[0,\ +\infty)$ 上一致收敛.

定理 17.10 设 (1) $f(x,\ y)$ 在 $x\geqslant a,\ y\geqslant c$ 上连续;(2) 积分 $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x,\ y)dy$ 关于 x 在 $[a,\ +\infty)$ 上的任一有界闭区间 $[a,\ B]$ 上一致收敛(称关于 x 在 $[a,\ +\infty)$ 上内闭一致收敛);

(3) 积分 $\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c, +\infty)$ 上内闭一致收敛;

(4) 积分

$$\int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \text{ 与 } \int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad ④$$

有一存在. 则有

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \quad ⑤$$

证明 假设④中第二个积分收敛. 先分析一下⑤式的意义. 由定理条件(3),知函数

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$$

在 $y \geqslant c$ 上连续,又由条件(2),知函数

$$I(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

在 $x \geqslant a$ 上连续. 因

$$|I(x)| \leqslant \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}y,$$

所以由条件(4)和比较判别法,知积分

$$\int_a^{+\infty} I(x)\mathrm{d}x$$

绝对收敛,故上式积分为一确定的数值. 定理即要证无穷积分

$$\int_c^{+\infty} F(y)\mathrm{d}y$$

收敛,且收敛到值 $\int_a^{+\infty} I(x)\mathrm{d}x$,即证

$$\lim_{A\to+\infty}\int_c^A F(y)\mathrm{d}y = \int_a^{+\infty} I(x)\mathrm{d}x.$$

任给 $\varepsilon > 0$,由④的第二个积分收敛,存在 $B_0 > a$,当 $B > B_0$ 时,有

$$\int_B^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2}, \quad ⑥$$

固定 B,又由定理条件(2),存在 $A_0>c$,当 $A>A_0$ 时,对任意的 $x\in[a, B]$,有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|<\frac{\varepsilon}{2(B-a)}. \tag{7}$$

所以当 $A>A_0$ 时,就有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_c^A F(y)\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty} I(x)\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_c^A\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_c^A\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y-\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{A} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right. \\
&\left.-\int_a^{+\infty}\left[\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right| \\
=&\left|\int_a^{+\infty}\left[\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant&\int_a^B\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}x+\int_B^{+\infty}\left[\int_A^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
\leqslant&\int_a^B\frac{\varepsilon}{2(B-a)}\mathrm{d}x+\int_B^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} |f(x, y)|\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad (\text{由 ⑦ 式}) \\
\leqslant&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon \quad (\text{由 ⑥ 式}).
\end{aligned}$$

按定义有

$$\lim_{A\to\infty}\int_c^A F(y)\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty} I(x)\mathrm{d}x.$$

即⑤式成立.证毕.

结合定理 17.9 与定理 17.10 可得下面定理.

定理 17.11 设 $f(x, y)$在 $x\geqslant a, y\geqslant c$ 上连续、非负;积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$ 是 $y\geqslant c$ 上的连续函数;积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$ 是 $x\geqslant a$ 上的连续函数;又积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \quad 与 \quad \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

有一存在.则

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_c^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

为了说明定理 17.10 中条件(4)的重要性,我们在 $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$ 上来考察函数 $f(x, y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$. 容易求出:

$$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=1}^{x=+\infty} = -\frac{1}{1+y^2},$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = -\frac{y}{x^2+y^2}\bigg|_{y=1}^{y=+\infty} = \frac{1}{1+x^2}.$$

所以有

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{4} &= \int_1^{+\infty}\left[\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &\neq \int_1^{+\infty}\left[\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

上面累次积分不相等,是由于定理 17.10 中条件(4)不满足,事实上我们有

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left[\int_1^{+\infty}\frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x &= \int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\left[\int_1^{+\infty}\frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y &= \int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{y}-\frac{1}{1+y^2}\right]\mathrm{d}y \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

而定理 17.10 的其余条件皆满足. 事实上,由

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=A}^{x=+\infty}\right| = \frac{A}{A^2+y^2} \leqslant \frac{1}{A},$$

可得出积分

$$\int_1^{\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

在 $y\geqslant 1$ 上一致收敛,当然更是内闭一致收敛. 同理积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y$ 在 $x\geqslant 1$ 上一致收敛.

注 讨论 $I(x)$连续与可微时,含参变量积分关于 x 一致收敛是不可缺的,没有更合适的条件能替代一致收敛条件. 当然讨论 $I(x)$在开区间

(a, b)上连续和可微时,我们只要积分在(a, b)上内闭一致收敛,并不要求积分在(a, b)上一致收敛.这是由于连续、可微是点点性质,只需积分在每点邻域上一致收敛即成,所以并没有改变一致收敛保证$I(x)$连续、可微的关系.讨论$I(x)$积分时,积分一致收敛不是合适的条件,下面引入的控制收敛乃是最合适的条件.

定理 17.8 中积分关于x在$[a, b]$上一致收敛,由

$$I(x) = \lim_{A\to\infty}\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y$$

在$[a, b]$上一致成立,总可求出常数$M>0$,使$\forall A>c$时,有

$$\left|\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M.$$

且M在$[a, b]$上可积.反之,若有$\left|\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant M(x)$,且$M(x)$在$[a, b]$上可积成立,积分对每一$x\in[a, b]$收敛,就称积分**控制收敛**,这时定理 17.7 的结论成立.定理 17.10 中并没有假设积分

$$I(x) = \lim_{A\to\infty}\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y$$

在$x\geqslant a$上一致收敛,而是假定$\forall A>c$,

$$\left|\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_c^{+\infty} |f(x, y)|\,\mathrm{d}y = g(x),$$

且$g(x)$在$[a, +\infty)$上可积,所以定理 17.10 的条件(4)实质上就是控制收敛的条件,这样

$$\begin{aligned}\int_a^{\infty} I(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{\infty}\left(\lim_{A\to\infty}\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{A\to\infty}\int_a^{\infty}\left(\int_c^A f(x, y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\ &= \lim_{A\to\infty}\int_c^{A}\left(\int_a^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_c^{\infty}\left(\int_a^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

上面式中第二个等号是承认控制收敛定理,第三个等号是由于定理 17.7.

思考练习 解答下列问题:

1. 试证明下列积分在指定区间上一致收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \ (x \geqslant a > 0)$.

(2) $\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \ (a \leqslant \alpha \leqslant b)$.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^p}\mathrm{d}x \ (p \geqslant 0)$.

(4) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \ (a \geqslant 0)$.

2. 讨论下列积分在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$: (A) $x \geqslant \delta > 0$; (B) $x \geqslant 0$.

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$: (A) $0 \leqslant x \leqslant M$; (B) $x \geqslant 0$.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$: (A) $x \geqslant 0$; (B) $x \geqslant \delta > 0$.

3. 设 $f \in C([0, \infty))$且有界, $f(0)>0$,证明函数

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

在 $y=0$ 处间断,在 $y \neq 0$ 处连续.

4. 利用积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$ 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 0).$$

5. 令 $f(t) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 试证明

(1) 该积分在 $-\infty < t < \infty$ 上一致收敛.

(2) $f \in C((-\infty, \infty))$.

(3) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

(4) $\int_0^{\pi} f(t)\sin t\mathrm{d}t \leqslant 0$.

(5) $f(t)$在$[0, \pi]$上至少有一零点.

6. 设 $f(x)$在$[0, \infty)$上内闭 Riemann 可积,且无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 证明

$$\lim_{a \to 0}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

7. 设 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 存在,令

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos(ux)\mathrm{d}x,$$

证明 $F(u)$在$(-\infty,\infty)$上连续,且 $F(u)\to 0(u\to+\infty)$.

8. 设 $f\in C((0,\infty))$,且 $\int_0^{+\infty}x^{\alpha}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=a,b$ 时均收敛,证明此反常积分对 α 在$[a,b]$上一致收敛.

9. 用覆盖定理证明定理 17.9.

10. 定理 17.10 中若条件(4)不满足,定理结论是否一定不成立? 考察例子: D: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$,

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\frac{\sin y}{y},$$

它满足控制收敛条件.

§3 含参变量的积分计算举例

这节我们通过例子来说明怎样用上节理论求某些含参变量的积分. 例 2 在 Fourier 级数一章已求出其值,这里再给出一种求积分值的方法.

例 1 求积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x\quad(b>a>0).$$

解法一 令

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan tx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x,$$

应用定理 17.8 得

$$I'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2}=\frac{\pi}{2t},$$

解出

$$I(t)=\frac{\pi}{2}\ln t+C.$$

令 $t=a$ 和 $I(a)=0$,定出常数 C 为:

$$C=-\frac{\pi}{2}\ln a.$$

因此得

$$I=I(b)=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

验证积分号下求导定理的条件.

(1) 被积函数 $f(t,x)=\dfrac{\arctan tx-\arctan ax}{x}$(补充定义 $x=0$ 时,$f(t,0)=t-a$)在 $a\leqslant t\leqslant b$, $x\geqslant 0$ 上连续,$f_t(t,x)=\dfrac{1}{1+t^2x^2}$ 也在 $a\leqslant t\leqslant b$, $x\geqslant 0$ 上连续;

(2) 积分 $\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛. 由

$$\frac{1}{1+t^2x^2}\leqslant\frac{1}{1+a^2x^2},$$

知积分 $\int_0^{+\infty}f_t(t,x)\mathrm{d}x$ 关于 t 在$[a,b]$上一致收敛.

解法二 因

$$\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}=\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2},$$

所以

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+t^2x^2}\right]\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\pi}{2t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

验证积分顺序可交换的条件.

(1) 函数 $f(t,x)=\dfrac{1}{1+t^2x^2}$在 $a\leqslant t\leqslant b$, $x\geqslant 0$ 上连续;

(2) 积分 $\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于 t 在$[a,b]$上一致收敛.

解法三 形式为

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\mathrm{d}x\quad(b>a>0)$$

的积分称为Froullani(佛罗兰尼)积分,可用定积分方法来求其值.

$$I=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to0+0}}\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\arctan bx-\arctan ax}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to0+0}}\left[\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\arctan bx}{x}\mathrm{d}x-\int_{\varepsilon}^{N}\frac{\arctan ax}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to0+0}}\left[\int_{b\varepsilon}^{bN}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x-\int_{a\varepsilon}^{aN}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to0+0}}\left[\int_{aN}^{bN}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x-\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\substack{N\to+\infty\\ \varepsilon\to0+0}}\left[\arctan\xi\ln\frac{b}{a}-\arctan\eta\ln\frac{b}{a}\right]$$

$$(a\varepsilon<\eta<b\varepsilon,\ aN<\xi<bN)$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}.$$

例 2 求积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x.$$

解 若直接在积分号下对 a 求导,得一发散积分.为此引入一个收敛因子 $\mathrm{e}^{-kx}(k>0)$,先求积分

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x.$$

应用积分号下求导定理,得

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kx}\cos ax\,\mathrm{d}x=\frac{k}{a^2+k^2}.$$

(上述积分对 a 一致收敛)所以

$$I(a)-I(0)=\int_0^{a}\frac{k}{t^2+k^2}\mathrm{d}t=\arctan\frac{a}{k}.$$

由 $I(0)=0$,得

$$I(a)=\arctan\frac{a}{k}\quad(k>0).$$

 怎么回到原积分 I 呢?办法是固定 a,而把 k 看成参量,考虑函

数 $f(k,x)=e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}$ ($f(k,0)=ae^{-kx}$) 在 $x\geqslant 0$, $0\leqslant k\leqslant 1$ 上连续,积分 $\int_0^{+\infty}f(k,x)dx$ 关于 k 在 $[0,1]$ 上一致收敛,故作为 k 的函数

$$\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx$$

在 $[0,1]$ 上连续,特别在 $k=0$ 点连续,于是得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\lim_{k\to 0+}\int_0^{+\infty}e^{-kx}\frac{\sin ax}{x}dx$$

$$=\lim_{k\to 0+}\arctan\frac{a}{k}=\frac{\pi}{2}\mathrm{sign}a.$$

其中 $\mathrm{sign}x$ 为符号函数.

思考练习 解答下列问题:

1. 求积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\quad(b>a>0)$.

2. 通过引入参数,计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx.$$

利用所得结果和变换 $x=\tan t$,求积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos t\,dt,\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt.$$

3. 通过引入收敛因子 e^{-kx} 的方法,求积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x}dx\quad(b>a>0).$$

(提示:参考例 1 中定积分方法)

4. 利用已知积分值求下列积分:$(b>a>0)$

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx$.　　(2) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2dx$.

5. 利用已知积分值

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

求下列积分:

(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$.

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx\ (a>0)$.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)} dx\ (a>0)$.

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-\cos x}{x^2}dx$.　　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}dx$.

6. 在 Fourier 级数中已知 $1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$，证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

(3) $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

§4　Euler 积分——B 函数与 Γ 函数

某些非初等函数可以用含参变量的积分表示. 本节讨论两个特殊函数——B(Beta)函数和 Γ(Gamma)函数，统称为 Euler 积分，其定义为:

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad \Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx.$$

在广义积分一章中，我们知道 B 函数的定义域为: $p>0,\ q>0$; Γ 函数的定义域为: $s>0$. 下面我们讨论这两函数一些有用的性质.

1. 两函数的其他形式:

(1) $B(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta$;

(2) $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx$;

(3) $\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1} e^{-x^2} dx$.

证明 (1) 令 $x=\sin^2\theta$,作积分变换得

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta d\theta;$$

若能记住此公式,对以后计算积分会带来很大方便.

(2) 令 $x=\frac{t}{1+t}$,作积分变换得

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt;$$

(3) 令 $x=t^2$,得

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = 2\int_0^{+\infty} t^{2s-1} e^{-t^2} dt.$$

2. 递推公式($p>0, q>0$):

(1) $B(p+1, q)=\frac{p}{p+q}B(p, q)$;

(2) $B(p, q+1)=\frac{q}{p+q}B(p, q)$;

(3) $B(p+1, q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p, q)$;

(4) $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

证明 (1)
$$\begin{aligned} B(p+1, q) &= \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1} dx \\ &= \frac{p}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx \\ &= \frac{p}{q}\left[\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx - \int_0^1 x^p(1-x)^{q-1} dx\right] \\ &= \frac{p}{q}[B(p, q)-B(p+1, q)], \end{aligned}$$

所以有

$$B(p+1,\ q)=\frac{p}{p+q}B(p,\ q).$$

(2) 因 $B(p,\ q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt$
$=B(q,\ p)$,这说明 B 函数具有对称性,所以

$$B(p,\ q+1)=B(q+1,\ p)=\frac{q}{q+p}B(q,\ p)$$

$$=\frac{q}{q+p}B(p,\ q).$$

(3) 由(1)与(2)即得

$$B(p+1,\ q+1)=\frac{p}{p+q+1}B(p,\ q+1)$$

$$=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,\ q);$$

(4) 由分部积分得

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty}x^p e^{-x}dx=[-x^p e^{-x}]\Big|_0^{+\infty}$$

$$+\int_0^{+\infty}px^{p-1}e^{-x}dx=p\Gamma(p).$$

注意 $B(1,\ 1)=\int_0^1 dx=1$, $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$, 故有

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\ B(n,\ m)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!},$$

其中 n, m 为正整数,并约定 $0!=1$,所以当 p, q 是正整数时,我们有

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

注 由 $\Gamma(n+1)=n!$ 得出 $\Gamma(s)$是定义在正整数集上的阶乘函数开拓到正实轴上的函数,它是一个非常有用的非初等函数.

3. 余元公式($0<p<1$):

(1) $B(p,\ 1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}$.

证明 (1) $B(p,\ 1-p)$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{r\to1-}\int_0^r\frac{x^{p-1}+x^{-p}}{1+x}\mathrm{d}x\\
&=\lim_{r\to1-}\int_0^r\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n(x^{p-1}+x^{-p})\mathrm{d}x\\
&=\lim_{r\to1-}\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}r^{n+p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-p+1}r^{n+1-p}\Big]\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-p+1}\\
&=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p-n}\\
&=\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}=\frac{\pi}{\sin p\pi}.
\end{aligned}
$$

上面最后一等号成立是利用 $\cos px$ 的 Fourier 展式

$$
\cos px=\frac{\sin p\pi}{\pi}\Big[\frac{1}{p}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2p}{p^2-n^2}\cos nx\Big](|x|\leqslant\pi),
$$

(2) 利用(1)与下面的 4 即得.

4. 两函数联系公式($p>0,\ q>0$):

$$
B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.
$$

证明 先设 $p>1,\ q>1$. 为了把两个积分掺合在一起,在

$$
\Gamma(p+q)=\int_0^{+\infty}x^{p+q-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x
$$

中我们令 $x=(1+t)u\ (t\geqslant0)$,变换后得

$$
\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}}=\int_0^{+\infty}u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-(1+t)u}\mathrm{d}u.
$$

上式乘以 t^{p-1},然后对 t 自 0 至 $+\infty$ 积分,得

$$
\Gamma(p+q)B(p,\ q)=\int_0^{+\infty}\Big[\int_0^{+\infty}t^{p-1}u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-(1+t)u}\mathrm{d}u\Big]\mathrm{d}t
$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[u^{p+q-1} \mathrm{e}^{-u} \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mathrm{e}^{-tu} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{q-1} \mathrm{e}^{-u} \Gamma(p) \mathrm{d}u = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

我们来验证上面交换积分顺序是合理的. 函数 $f(t, u) = t^{p-1} u^{p+q-1} \mathrm{e}^{-(1+t)u}$ 在 $t \geqslant 0$, $u \geqslant 0$ 上连续、非负;积分

$$\int_0^{+\infty} f(t, u) \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(p+q) t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

在 $t \geqslant 0$ 上连续;积分

$$\int_0^{+\infty} f(t, u) \mathrm{d}t = \Gamma(p) u^{q-1} \mathrm{e}^{-u}$$

在 $u \geqslant 0$ 上连续,又积分

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} f(t, u) \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}u = \Gamma(p)\Gamma(q) < +\infty.$$

由推论知两积分可交换顺序.

设 $p>0$, $q>0$ 时,由已证结果得

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)},$$

上式两端分别应用递推公式有,

$$\mathrm{B}(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)} \mathrm{B}(p, q),$$

$$\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{p\Gamma(p) q\Gamma(q)}{(p+q+1)(p+q)\Gamma(p-q)}.$$

因此得

$$\mathrm{B}(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

公式表明: B 函数在其定义域上的值,可归结为 Γ 函数在其定义域上的值;由递推公式,只要知道 Γ 函数在(0, 1)区间上的值,即可确定它在正实轴上的值;余元公式进一步缩小 Γ 函数未知值的范围,只要知道它在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上的值,即可确定它在(0, 1)上的值.

利用 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)=\pi$, $\Gamma(1)=1$,由联系公式可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

又由 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$,得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

5. 两函数在其定义域上连续,并任意次可微.

要说明 $\Gamma(p)$在 $p>0$ 上连续,并有任意阶连续导数,只要证明参变积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}dx \quad (n=1, 2, \cdots)$$

在$[\delta, A]$上一致收敛$(0<\delta<A<+\infty)$,即在$(0, +\infty)$上内闭一致收敛.

当 $p\geqslant\delta$, $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,成立不等式.

$$|x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}|\leqslant x^{\delta-1}|\ln x|^n.$$

因反常积分

$$\int_0^1 x^{\delta-1}|\ln x|^n dx \qquad ①$$

收敛,所以积分

$$\int_0^1 x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}dx$$

在 $p\geqslant\delta$ 上一致收敛.

又当 $0<p\leqslant A$, $x\geqslant 1$ 时,成立不等式:

$$|x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}|\leqslant x^{A+n-1}e^{-x}.$$

因积分

$$\int_1^{+\infty} x^{A+n-1}e^{-x}dx$$

收敛,所以积分

$$\int_1^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x}dx \qquad ②$$

在 $0\leqslant p\leqslant A$ 上一致收敛.

结合①与②,得出参变积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}(\ln x)^n e^{-x} dx$$

在 $\delta\leqslant p\leqslant A$ 上一致收敛. 应用连续性定理和积分号下求导定理,知 $\Gamma(p)$ 在 $[\delta, A]$ 上连续和任意次可导,且导数连续. 再由 δ、A 的任意性,知 $\Gamma(p)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续和任意次连续可导.

因 $\Gamma(p)>0$,通过联系公式,即得 B 函数在 $p>0$, $q>0$ 上连续和任意次连续可微.

思考练习 解答下列问题:

1. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}\,dx$.　　(2) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx\ (a>0)$.

(3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}$.　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

(5) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cdot\cos^4 x\,dx$.　　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

(9) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$.　　(10) $\int_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx$.

2. 证明等式($p>-1$, $q>-1$)

$$\int_{-1}^1 (1+x)^p(1-x)^q dx = 2^{p+q+1}B(p+1, q+1).$$

3. 计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$$

4. 试证明

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\ (n>0)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx = 1$.

5. 证明 $\Gamma(p)$在 $p>0$ 上有唯一正的最小值.

6. 证明 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{\lambda}}=1$.

7. 若 $f\in C([0,1])$,试证明

$$g(t)=\int_0^1\frac{f(x)}{|x-t|^{\alpha}}\mathrm{d}x\quad(0<\alpha<1)$$

在$[0,1]$上连续.

8. 说明满足函数方程 $f(x+1)=xf(x)$ $(x>0)$和初条件 $f(1)=1$ 的解不唯一,甚至可以不连续.

9. 证明 $\Gamma(x)$和 $\ln\Gamma(x)$在 $x>0$ 上为凸函数.

第十八章 重 积 分

我们已将一元函数微分学推广到多元函数,从现在起我们要将一元函数积分学推广到多元函数.对一元函数积分来说,积分域只有区间一种情形,而对多元函数积分来说,积分域可以是平面的区域或空间的立体,也可以是空间的曲线或曲面等.因此,多元函数积分可为重积分、曲线积分和曲面积分等.

§1 重积分的定义

1.1 求曲顶柱体的体积

我们以二重积分为例来说明重积分的概念.

设函数 $z=f(x, y)$在有界区域 D 上连续、非负,它的图形是一张 D 上的连续曲面 S.

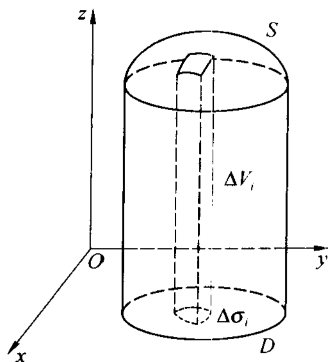


图 18-1

以区域 D 为底,以 S 为顶,以 D 的边界为准线,而母线平行于 z 轴的柱面为侧面的立体称为“**曲顶柱体**”(图 18-1).我们的问题是求曲顶柱体的体积.如果 S 是一平行于底面的平面块,曲顶柱体就变为平顶柱体,其体积等于底面积乘以高.现在 S 为一曲面,无现成公式可用,怎么克服这一困难呢?回忆求曲边梯形面积时,曾采用分割区间,局部以直代曲,求和得曲边梯形面积的近似值,取极

限得曲边梯形的精确值的方法.这里我们仍采用这一行之有效的方法来求曲顶柱体的体积.

为此将区域 D 剖分为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$,记号 $\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$同时也表示小区域的面积,于是曲顶柱体 V 相应地被分成 n 个小曲顶柱体 $\Delta V_i(i=1, 2, \cdots, n)$,记号 ΔV_i 与 V 同时也表示其体积.对每个小曲顶柱体 ΔV_i,我们用以 $\Delta\sigma_i$ 为底,以$(\xi_i, \eta_i)\in\Delta\sigma_i$ 点的函数值 $f(\xi_i, \eta_i)$为高的小平顶柱体的体积作为 ΔV_i 的近似值:

$$\Delta V_i \cong f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i(i = 1, 2, \cdots, n).$$

求和得 V 的近似值:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

让剖分越来越细,确切地说,令 d_i 表示 $\Delta\sigma_i$ 的直径,又令

$$d = \max_{1\leqslant i\leqslant n} d_i,$$

称其为剖分的直径, $d\to 0$ 即表示剖分越来越细,取极限得曲顶柱体的体积精确值:

$$V = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

这个极限值就称为函数 $f(x, y)$在 D 上的二重积分,记作

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \quad 或 \quad \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1.2 面积的定义

我们已知多边形和圆的面积,一般常见的有界区域和有界闭区域总是有面积的,但存在形状较怪的区域和有界闭域没有通常意义下的面积.所以,为了给重积分一个确切的定义,首先尽可能简明扼要地介绍一些平面集合面积的有关内容.

设 A 是平面有界集, A°与 $\overline{A}$ 表示集合 A 的内部和闭包.用间距为 $\frac{1}{2^n}$ 的平行于 x 轴和 y 轴的直线网,把平面分成无限多

n 阶网格和,每个网格是边长为 $\dfrac{1}{2^n}$ 的闭正方形,考虑所有包含在 A° 内的 n 阶网格和,记为 Q_n^-;所有与 $\overline{A}$ 有交的 n 阶网格和,记为 Q_n^+,显然

$$Q_n^- \subset Q_n^+.\ (图\ 18\text{-}2)$$

将上面直线网二等分,即作间距为 $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 的平行于 x 轴和 y 轴的直线网,把平面分成无限多($n+1$)阶网格和,每个网格是边长为 $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ 的小闭正方形,也就是把上面每个网格分成四个小网格.若原网格包含在 A° 内,则等分成的四个小网格皆包含在 A° 内;若原网格与 $\overline{A}$ 不交,则等分成的四个小网格皆不与 $\overline{A}$ 相交,所以有

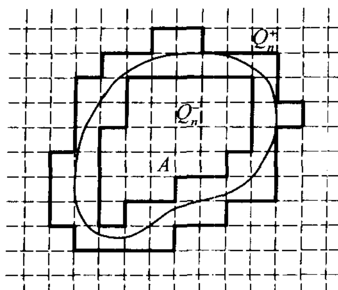


图 18-2

$$Q_n^- \subset Q_{n+1}^-,\quad Q_n^+ \supset Q_{n+1}^+. \tag{①}$$

因 Q_n^-, Q_n^+ 是有限个闭正方形组成的集合,它们的面积总是存在的,分别记为:

$$mQ_n^- \quad 和 \quad mQ_n^+.$$

由①知序列 $\{mQ_n^-\}$ 为递增序列;序列 $\{mQ_n^+\}$ 为递减序列.

定义 18.1 若

$$\lim_{n\to\infty} mQ_n^- = \lim_{n\to\infty} mQ_n^+, \tag{②}$$

则称集合 A 有面积,并称上式公共极限值为 A 的**面积**,记作 mA. 集 A 也称 **Jordan 可测集**.

集 A 有无面积和面积的值看似依赖特殊网格的取法,实质上与网格取法无关,只反映集合 A 固有的性质,我们不作进一步的阐述.

称有限个边平行于坐标轴的闭矩形之和集为**简单图形**,简

单图形不要求是连通集.

定理 18.1 平面有界集 A 面积存在的充分必要条件是：任给 $\varepsilon>0$,存在简单图形 Q(图 18-3),使

$$\partial A \subset Q,\ mQ < \varepsilon.$$

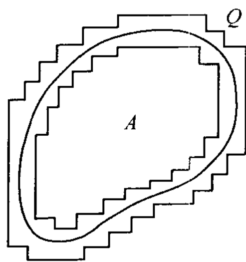


图 18-3

证明 证必要性. 任给 $\varepsilon>0$,由 mA 存在,总可找到 n,使

$$mQ_n^+ - mQ_n^- = m(Q_n^+ - Q_n^-) < \varepsilon.$$

令 $Q=\overline{Q_n^+ - Q_n^-}$,就有 $mQ<\varepsilon$ 和

$$\partial A = \overline{A} - A^\circ \subset Q_n^+ - Q_n^- \subset Q.$$

证充分性. 无妨设 $\partial A \subset Q^\circ$(否则可把 Q 中每个矩形适当扩大,使其和仍为简单图形,面积不超过 2ε),令

$$\rho = \operatorname{dist}(\partial A,\ \partial Q) > 0.$$

当 $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}<\rho$ 时,与 ∂A 相交的边长为 $\dfrac{1}{2^n}$ 的网格包含在 Q 内,所以

$$Q_n^+ - Q_n^- \subset Q.$$

于是有

$$m(Q_n^+ - Q_n^-) \leqslant mQ < \varepsilon.$$

这表明

$$\lim_{n\to\infty} mQ_n^+ = \lim_{n\to\infty} mQ_n^-,$$

即 A 的面积存在,证毕.

用同样方法可证,有界集 A 的面积为零的充要条件是,任给 $\varepsilon>0$,存在简单图形 Q,使

$$A \subset Q,\ mQ < \varepsilon.$$

这样,定理 18.1 可改述成如下形式：有界集合 A 有面积的充要条件是边界 ∂A 的面积为零.

推论 18.1 设集合 A, B 有面积,则

(1) 集合 $A\cup B$ 有面积. 如果 $A^\circ \cap B^\circ = \varnothing$,则

$$m(A \cup B) = mA + mB;$$

(2) 集合 $A\cap B$ 有面积;

(3) 集合 $A\backslash B$ 有面积.

证明 (1) $\forall \varepsilon>0$,由定理 18.1,存在简单图形, Q_1, Q_2, 满足:

$$\partial A \subset Q_1,\ mQ_1 < \frac{\varepsilon}{2};\ \partial B \subset Q_2,\ mQ_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $Q=Q_1 \cup Q_2$,显然 Q 仍为简单图形,满足:

$$\partial(A \cup B) \subset (\partial A \cup \partial B) \subset (Q_1 \cup Q_2) = Q,$$

且

$$mQ \leqslant mQ_1 + mQ_2 < \varepsilon,$$

所以由定理 18.1 知集合 $A \cup B$ 面积存在.

若 $A^{\circ} \cap B^{\circ} = \varnothing$. 记号 Q_n^-, $Q_{1,n}^-$, $Q_{2,n}^-$ 分别表示包含在 $A \cup B$, A, B 内部的 n 阶网格和,容易看出

$$(Q_{1,n}^- \cup Q_{2,n}^-) \subset Q_n^- \quad Q_{1,n}^- \cap Q_{2,n}^- = \varnothing.$$

因而

$$mQ_{1,n}^- + mQ_{2,n}^- \leqslant mQ_n^-.$$

记号 Q_n^+, $Q_{1,n}^+$, $Q_{2,n}^+$ 分别表示与 $A \cup B$, A, B 闭包相交的 n 阶网格和,容易得出

$$Q_n^+ \subset (Q_{1,n}^+ \cup Q_{2,n}^+),$$

因而

$$mQ_n^+ \leqslant mQ_{1,n}^+ + mQ_{2,n}^+.$$

由 A, B 面积存在,可得

$$mA + mB \leqslant \lim_{n\to\infty} mQ_n^- \leqslant \lim_{n\to\infty} mQ_n^+ \leqslant mA + mB,$$

这说明 $A \cup B$ 面积存在,且

$$m(A \cup B) = mA + mB.$$

(2)与(3)同样可证. 证毕.

由推论 18.1 得出,若集合 A 有面积,则 $A^{\circ} = A - \partial A$, $\overline{A} = A \cup \partial A$ 也有面积,且 $mA = mA^{\circ} = m\overline{A}$. 事实上由

$$mA = mA^{\circ} + m\partial A = mA^{\circ},$$

$$m\overline{A} = mA + m\partial A = mA,$$

即得三者面积相等.

推论 18.1 不难推广至有限情形：若有界集合 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$面积存在，则集合$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ 与$\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 面积也存在，且$m(\bigcup_{i=1}^{n}A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}mA_i$.

推论 18.2 设Γ为平面上一可求长曲线，则 $m\Gamma=0$. 特别有：由有限条可求长曲线所围成的区域面积存在.

证明 设曲线Γ的长度为l，将Γ分成弧长相等的n个弧段$\Gamma_k(k=1, 2, \cdots, n)$. 作间距为$\frac{l}{n}$的平行直线网，则每一小段$\Gamma_k$至多落在四个网格内，因此至多可用$4n$个网格所组成的简单图形$Q$覆盖$\Gamma$，且

$$mQ \leqslant 4n \times \left(\frac{l}{n}\right)^2 = \frac{4l^2}{n}.$$

任给$\varepsilon>0$，只要n充分大，就有$mQ<\varepsilon$，由定义知$m\Gamma=0$. 证毕.

推论 18.3 设Γ是由$y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$或$x=f(y)$ $(c\leqslant y\leqslant d)$所表示的连续曲线，则 $m\Gamma=0$. 特别有：由有限条显函数所表示的连续曲线所围成的区域面积存在.

证明 已知连续函数定积分存在，和定积分存在的充要条件：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$区间$[a, b]$的分法Δ：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

ω_k表示$f(x)$在$[x_{k-1}, x_k]$上的振幅$(k=1, 2, \cdots, n)$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_n < \varepsilon.$$

取简单图形Q即以$[x_{k-1}, x_k]$为底，以ω_k为高的n个矩形之和，显然

$$\Gamma \subset Q,\ mQ = \sum_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k < \varepsilon.$$

所以$m\Gamma=0$. 证毕.

1.3 重积分的定义

定义 18.2 设D为平面有界可测集，将D分成有限个集

$\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$之和：$D=\bigcup_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i$，$\Delta\sigma_i$ 可测且两两无公共内点，则称这种分法为 D 的一个**剖分**或**分法**，记作

$$\Delta = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}.$$

记号 $\operatorname{diam}\Delta\sigma_i$ 表示集合 $\Delta\sigma_i$ 的**直径**，称数

$$\|\Delta\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam}\Delta\sigma_i\}$$

为分法 Δ 的**直径**.

定义 18.3 设 D 为平面有界可测集，函数 $f(x, y)$在 D 上定义，若对 D 的任意分法

$$\Delta = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}$$

和任意取点$(\xi_i, \eta_i)\in\Delta\sigma_i(i=1, 2, \cdots, n)$（$\Delta\sigma_i$ 同时表示集合 $\Delta\sigma_i$ 的面积），Riemann 和的极限存在：

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I,$$

则称 $f(x, y)$在 D 上可积，I 称为 $f(x, y)$在 D 上的**二重积分**，记作

$$I = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad 或 \quad I = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma. \qquad ①$$

D 上所有可积函数全体记作 $R(D)$.

注 1. 二重积分是 $\|\Delta\|\to 0$ 时 Riemann 和的极限，而不是 $n\to+\infty$ 或 $\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\sigma_i\}\to 0$ 时 Riemann 和的极限，前者趋于零，足以保证分法越来越细，每个可测集 $\Delta\sigma_i$ 收缩成一点；而后者趋于零，不能保证每个元素 $\Delta\sigma_i$ 收缩成一点，也可能收缩成一线段.

2. 考虑 D 的两个方法

$$\Delta_1 = \{\Delta\sigma_1', \Delta\sigma_2', \cdots, \Delta\sigma_n'\},\ \Delta_2 = \{\Delta\sigma_1'', \Delta\sigma_2'', \cdots, \Delta\sigma_k''\}.$$

把这两个分法合在一起的分法记为 $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$，它是由 $\{\Delta\sigma_i'\cap\Delta\sigma_j''\}$ $(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, k)$中非空集元素组成，每个元素 $\Delta\sigma_i'\cap\Delta\sigma_j''$不一定连通. 所以在二重积分定义中，我们不要求 $\Delta\sigma_i$ 是连通的，只要求其为可测集即成.

3. 重积分定义中不要求 $f(x, y)$有界. 但若 D 是有界可测闭区域或有界可测区域,则函数在 D 上可积必在 D 上有界,事实上,如果函数 $f(x, y)$在 D 上无界,由于 D 是区域或闭区域,所以一定存在其直径 $\|\Delta\|$ 充分小的分法 Δ,使每一元素 $\Delta\sigma_i>0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,这样 Riemann 和

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

中适当取点 (ξ_i, η_i),可以使 σ 任意地大,因此, $\|\Delta\|\to 0$ 时 Riemann 和的极限不存在,所以函数可积一定有界.

若 $f(x, y)\geqslant 0$,二重积分①的几何意义表示曲顶柱体的体积,对一般的可积函数 $f(x, y)$,重积分①可以看成是 xy 平面上、下曲顶柱体体积的代数和.

若 V 是三维空间中的有界可测集(即有体积), $f(x, y, z)$ 在 V 上定义,类似可定义 $f(x, y, z)$在 V 上的三重积分,记为

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\mathrm{d}V \quad \text{或} \quad \iiint\limits_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

若 $f(x, y, z)$表示立体 V 的密度,则三重积分即为立体的质量.

思考练习 试证明下列命题:

1. 设 A, B 为可测集, 则 $A\backslash B$ 可测.
2. 设 A, B 可测,则 $m(A\cup B)+m(A\cap B)=mA+mB$.

§2 重积分的存在性及其性质

2.1 函数可积的充分必要条件

设 D 是平面有界可测集, $f(x, y)$在 D 上有界, M, m 分别表示 $f(x, y)$在 D 上的上、下确界,称 $\Omega=M-m$ 为函数在 D 上的振幅. 设 D 有一分法

$$\Delta=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\},$$

让

$$M_i = \sup_{(x,\ y)\in\Delta\sigma_i}\{f(x,\ y)\},\ m_i = \inf_{(x,\ y)\in\Delta\sigma_i}\{f(x,\ y)\}.$$

定义 18.4 $f(x,\ y)$关于分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}$的大和为

$$S(f,\ \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\sigma_i.$$

小和为

$$s(f,\ \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\sigma_i.$$

记号 $\Delta\sigma_i$ 同时也表示集合 $\Delta\sigma_i$ 的面积 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

我们称分法 $\Delta' = \{\Delta\sigma_1',\ \Delta\sigma_2',\ \cdots,\ \Delta\sigma_l'\}$是分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}$的**细分**,若对任一 $\Delta\sigma_i'$ $(1\leqslant i\leqslant l)$,存在 $\Delta\sigma_j$ $(1\leqslant j\leqslant n)$,使

$$\Delta\sigma_i' \subset \Delta\sigma_j.$$

显然由两个分法 Δ_1, Δ_2 所合成的分法 $\Delta'=\Delta_1\cup\Delta_2$ 既是 Δ_1 的细分,又是 Δ_2 的细分.

引理 18.1 (1) 对 D 的任一分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n\}$,有

$$S(f,\ \Delta) = \sup_{\substack{(\xi_i,\ \eta_i)\in\Delta\sigma_i\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i;$$

$$s(f,\ \Delta) = \inf_{\substack{(\xi_i,\ \eta_i)\in\Delta\sigma_i\\ 1\leqslant i\leqslant n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

(2) 若分法 Δ'是 Δ 的细分,则

$$S(f,\ \Delta) \geqslant S(f,\ \Delta');\ s(f,\ \Delta) \leqslant s(f,\ \Delta').$$

(3) 对 D 的任意两个分法 Δ_1 与 Δ_2,有

$$s(f,\ \Delta_1)\leqslant S(f,\ \Delta_2).$$

引理的证明与定积分中相应引理的证明几乎完全一样,我们将略去其证明.

由引理 18.1 的(3),固定分法 Δ_1,考虑所有可能的 D 的分法 Δ_2,得

$$s(f,\ \Delta_1)\leqslant \inf_{\{\Delta_2\}}\{S(f,\ \Delta_2)\}=I^*.$$

称 I^* 为 $f(x,\ y)$在 D 上的**上积分**,记作:

$$I^* = \overline{\iint_D} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

再让 Δ_1 取遍所有可能的 D 的分法,得

$$\sup_{\{\Delta_1\}}\{s(f,\ \Delta_1)\}=I_*\leqslant I^*.$$

称 I_* 为 $f(x,\ y)$在 D 上的**下积分**,记作:

$$I_* = \underline{\iint_D} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对上、下积分有下面的 Darboux 定理.

定理 18.2 设 D 是有界可测集, $f(x,\ y)$在 D 上有界,则

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} S(f,\ \Delta) = I^*;\ \lim_{\|\Delta\|\to 0} s(f,\ \Delta) = I_*.$$

证明 我们只证第一式. $\forall\varepsilon>0$,由上积分定义,存在一分法 $\Delta^*=\{\Delta\sigma_1^*,\ \Delta\sigma_2^*,\ \cdots,\ \Delta\sigma_N^*\}$,使得

$$I^*\leqslant S(f,\ \Delta^*)\leqslant I^*+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因集合 $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{N}\partial(\Delta\sigma_i^*)$的面积为零,所以存在简单图形 Q, 使

$$\Gamma\subset Q^\circ,\ mQ<\frac{\varepsilon}{2\Omega},$$

其中 Ω 为 $f(x,\ y)$在 D 上的振幅(图 18-4). 令

$$\delta=\mathrm{dist}(\Gamma,\ \partial Q)>0.$$

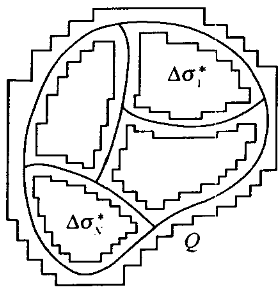


图 18-4

对于 D 的任一分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}$,满足 $\|\Delta\|<\delta$. 把 Δ 的元素分成两类: 整个元素 $\Delta\sigma_i$ 包含在某一 $\Delta\sigma_j^*$ $(1\leqslant j\leqslant N)$内的归入第一类;其余元素归入第二类,第二类元素 $\Delta\sigma_i$ 必与 $\Delta\sigma_j^*$ 和 $\Delta\sigma_k^*$ $(j\neq k)$相交,又可将其分为两种情形: $\Delta\sigma_i$ 或与 Γ 相交;或与 Γ 不交,这时 $\Delta\sigma_i$ 的一部分在 $\Delta\sigma_j^*$ 内,一部分在 $\Delta\sigma_k^*$ 内. 但不管那一种情形,第二类元素 $\Delta\sigma_i$ 包含在 Q 内.

记 $\Delta'=\Delta\cup\Delta^*$,分法 Δ 的第一类元素 $\Delta\sigma_i$ 也是分法 Δ'的元素,所以

$$\begin{aligned}0\leqslant S(f,\Delta)-I^* &= S(f,\Delta)-S(f,\Delta')+S(f,\Delta')-I^*\\ &\leqslant \Omega\cdot mQ+S(f,\Delta^*)-I^*\\ &\leqslant \Omega\cdot\frac{\varepsilon}{2\Omega}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}S(f,\Delta)=I^*.$$ 证毕.

定理 18.3 设 D 为有界可测集, $f(x,y)$在 D 上有界,则下列命题等价;

(1) $f(x,y)$在 D 上可积;

(2) $\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}[S(f,\Delta)-s(f,\Delta)]=\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i=0.$

其中 ω_i 表示 $f(x,y)$在 $\Delta\sigma_i$ 上的振幅;

(3) $\forall\varepsilon>0$, $\exists D$ 的一个分法 Δ,使

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\varepsilon;$$

(4) $I^*=I_*$.

证明 (1)⇒(2). $\forall\varepsilon>0$,由(1),$\exists\delta>0$,当 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i<I+\varepsilon.$$

再由引理 18.1 中(1),得

$$I-\varepsilon\leqslant s(f,\Delta)\leqslant S(f,\Delta)\leqslant I+\varepsilon,$$

故(2)成立.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(4). 由

$$0\leqslant I^*-I_*\leqslant S(f,\Delta)-s(f,\Delta)<\varepsilon,$$

即可看出(4)成立.

(4)⇒(1). 记 $I=I^*=I_*$,根据定理 18.2,对下式

$$s(f,\Delta)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i\leqslant S(f,\Delta)$$

令 $\|\Delta\| \to 0$ 取极限,即得

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I. \quad \text{证毕.}$$

为了重积分换元的需要,我们再给出函数可积的一个充要条件.

推论 18.4 设 D 为有界可测集, $f(x, y)$ 在 D 上有界. 则 $f(x, y)$ 在 D 上可积的充要条件为: 对 D 的一类特殊分法 $\Delta = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n, \Delta\sigma_{n+1}, \cdots, \Delta\sigma_{n+p}\}$, 其中 $\Delta\sigma_1, \cdots, \Delta\sigma_n$ 的闭包是含于 D° 内的可测集(称分法的内部元素), $\Delta\sigma_{n+1}, \cdots, \Delta\sigma_{n+p}$ 的闭包与边界 ∂D 相交(称分法的边界元素),及任意取点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 极限

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I$$

存在. 这时 $I = \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

证明 证必要性. 由 $f(x, y)$ 在 D 上可积,对任意取点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n+p)$,有

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n+p} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I.$$

因 ∂D 的面积为零,所以

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=n+1}^{n+p} \Delta\sigma_i = 0,$$

又因 $f(x, y)$ 有界,故有

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=n+1}^{n+p} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = 0.$$

于是我们得到

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i = I.$$

证充分性. 由必要性证明可以看出,推论 18.4 中极限存在等价于

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n+p} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i = I.$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,对一类特殊分法 Δ,当 $\|\Delta\|<\delta$ 时,有

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n+p} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i<I+\varepsilon.$$

由引理 18.1 的(1)得

$$I-\varepsilon\leqslant S(f,\ \Delta)\leqslant I+\varepsilon,$$
$$I-\varepsilon\leqslant s(f,\ \Delta)\leqslant I+\varepsilon.$$

因此,存在分法 Δ,使

$$S(f,\ \Delta)-s(f,\ \Delta)\leqslant 2\varepsilon.$$

根据定理 18.3 的(3),知 $f(x,\ y)$在 D 上可积. 证毕.

注 此推论说明,在重积分定义中,取点$(\xi_i,\ \eta_i)$的任意性是本质的,而分法的任意性不是本质的,如我们可以只考虑用平行直线网分割 D. 又重积分是 Riemann 和的极限,这个 Riemann 和可以只对分法的内部元素求和,边界元素可以略去不计,而内部元素是些小正方形或小矩形,这对处理问题带来很大方便.

2.2 可积函数类

定理 18.4 设 D 是有界可测闭集, $E\subset D$,且 E 的面积为零, $f(x,\ y)$在 D 上有界,在 $D\backslash E$ 上连续,则 $f(x,\ y)$在 D 上可积. 特别 $E=\varnothing$,得 $f(x,\ y)$在 D 上连续,则 $f(x,\ y)$在 D 上可积.

证明 $\forall\varepsilon>0$,因集合 E 的面积为零,故存在简单图形 Q,使

$$E\subset Q^{\circ},\ mQ<\frac{\varepsilon}{4M},$$

其中 $M=\sup\limits_{(x,\ y)\in D}|f(x,\ y)|$.

又 $D\backslash Q^{\circ}$为有界闭集, $f(x,\ y)$在 $D\backslash Q^{\circ}$上一致连续,所以存在 $D\backslash Q^{\circ}$的一个分法$\{\Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}$,使 $f(x,\ y)$在 $\Delta\sigma_i$ 上的振

幅 $\omega_i<\frac{\varepsilon}{2\cdot mD}$ $(i=2,3,\cdots,n)$. 令

$$\Delta\sigma_1 = D\cap Q,$$

这样我们得一分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n\}$,有

$$\begin{aligned}S(f,\Delta)-s(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i\\ &\leqslant 2M\cdot mQ+\frac{\varepsilon}{2\cdot mD}\sum_{i=2}^{n}\Delta\sigma_i\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由定理 18.3 的(3),知 $f(x,y)$在 D 上可积. 证毕.

定理 18.5 设 D 是有界可测闭集, $f(x,y)$在 D 上可积,且 $m\leqslant f\leqslant M$. φ 在$[m,M]$上连续,则复合函数 $h(x,y)=\varphi(f(x,y))$在 D 上可积.

证明 $\forall\varepsilon>0$,由 φ 在$[m,M]$上一致连续,$\exists\delta>0$,当 $s,t\in[m,M]$,且$|s-t|<\delta$ 时,有

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon.$$

因 f 在 D 上可积,所以存在 D 的分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n\}$,使得

$$S(f,\Delta)-s(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta\sigma_i<\varepsilon\delta,$$

其中 M_i, m_i 为 f 在 $\Delta\sigma_i$ 上的上、下确界. 记 M_i^*, m_i^* 为 h 在 $\Delta\sigma_i$ 上的上、下确界$(i=1,2,\cdots,n)$. 对指标 i 分成两类:

$$A=\{i\,|\,M_i-m_i<\delta\},\quad B=\{i\,|\,M_i-m_i\geqslant\delta\}.$$

由于

$$M_i^*=\sup_{(x,y)\in\Delta\sigma_i}\varphi(f(x,y))\leqslant\sup_{m_i\leqslant t\leqslant M_i}\varphi(t)=\varphi(s_i),$$

$$m_i^*=\inf_{(x,y)\in\Delta\sigma_i}\varphi(f(x,y))\geqslant\inf_{m_i\leqslant t\leqslant M_i}\varphi(t)=\varphi(t_i),$$

其中 $s_i,t_i\in[m_i,M_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

当 $i\in A$ 时, $|s_i-t_i|\leqslant M_i-m_i<\delta$,故有

$$M_i^*-m_i^*\leqslant\varphi(s_i)-\varphi(t_i)<\varepsilon;$$

当 $i\in B$ 时, $M_i^* - m_i^* \leqslant 2K$, $K=\sup\limits_{m\leqslant t\leqslant M}|\varphi(t)|$,又

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta\sigma_i \leqslant \sum_{i\in B}(M_i - m_i)\Delta\sigma_i < \delta\varepsilon,\text{推出}\sum_{i\in B}\Delta\sigma_i < \varepsilon.$$

因而得

$$\begin{aligned}S(h,\ \Delta)-s(h,\ \Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i^* - m_i^*)\Delta\sigma_i\\ &= \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)\Delta\sigma_i\\ &\quad+\sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\Delta\sigma_i\\ &\leqslant \varepsilon mD+2K\varepsilon=(mD+2K)\varepsilon,\end{aligned}$$

这说明 h 在 D 上可积. 证毕.

2.3 可积函数的性质

定理 18.6 设 D 是有界可测集, $f(x,\ y)$, $g(x,\ y)$在 D 上可积、有界,则有下列性质:

(1) $f\pm g$ 在 D 上可积,且

$$\iint_D[f(x,\ y)\pm g(x,\ y)]\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma;$$

(2) kf 在 D 上可积(k 为常数),且

$$\iint_D kf(x,\ y)\mathrm{d}\sigma=k\iint_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma;$$

(3) 若在 D 上有 $f(x,\ y)\leqslant g(x,\ y)$,则

$$\iint_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma;$$

(4) $|f|$在 D 上可积,且

$$\left|\iint_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint_D|f(x,\ y)|\mathrm{d}\sigma;$$

(5) $f\cdot g$ 在 D 上可积;

(6) 若 D 是闭区域, f 在 D 上连续,则存在点$(\xi,\ \eta)\in D$,使

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta) \cdot mD;$$

(7) 设 D 是由无公共内点的可测子集 D_1, D_2 组成,即 $D=D_1 \cup D_2$, $D^\circ{}_1 \cap D^\circ{}_2=\varnothing$. f 在 D 上有界. 则 f 在 D 上可积的充要条件是 f 在 D_1, D_2 上可积,且

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$

证明 我们只证明(7). 设 f 在 D_1, D_2 上可积,由定理 18.3 的(3),对 D_1 可以找到分法 $\Delta_1=\{\Delta\sigma_1^1, \Delta\sigma_2^1, \cdots, \Delta\sigma_p^1\}$,使

$$\sum_{i=1}^{p} \omega_i^1 \Delta\sigma_i^1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

其中 ω_i^1 为 f 在 $\Delta\sigma_i^1 (i=1, 2, \cdots, p)$上的振幅,对 D_2 可以找到分法 $\Delta_2=\{\Delta\sigma_1^2, \Delta\sigma_2^2, \cdots, \Delta\sigma_q^2\}$,使

$$\sum_{i=1}^{q} \omega_i^2 \Delta\sigma_i^2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 ω_i^2 为 f 在 $\Delta\sigma_i^2 (i=1, 2, \cdots, q)$上的振幅.

这样,我们得到 D 上的一个分法

$$\Delta = \{\Delta\sigma_1^1, \cdots, \Delta\sigma_p^1, \Delta\sigma_1^2, \cdots, \Delta\sigma_q^2\},$$

相应地大和与小和的差为:

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \omega_i^1 \Delta\sigma_i^1 + \sum_{i=1}^{q} \omega_i^2 \Delta\sigma_i^2 < \varepsilon.$$

再由定理 18.3 的(3),知函数 f 在 D 上可积.

反之,若 f 在 D 上可积, $\forall \varepsilon>0$,总可找到分法

$$\Delta = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\},$$

使

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta\sigma_i < \varepsilon,$$

其中 ω_i 为 f 在 $\Delta\sigma_i$ 上的振幅$(i=1, 2, \cdots, n)$.

令 $\Delta\sigma_i^1 = D_1 \cap \Delta\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n)$,即得 D_1 的一个分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1^1, \Delta\sigma_2^1, \cdots, \Delta\sigma_n^1\}$(若 $\Delta\sigma_i^1$ 为空集,则删去该元素),有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i^1\Delta\sigma_i^1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i < \varepsilon,$$

故 f 在 D_1 上可积. 同理可证 f 在 D_2 上可积.

要证积分等式成立,只要在 D_1, D_2 上作 f 的 Riemann 和,两者相加即为 f 在 D 上的 Riemann 和,令 $\|\Delta\|\to 0$, Riemann 和趋于相应的积分,即得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}\sigma.$$ 证毕.

思考练习 试证明下列命题:

1. 利用定理 18.5 证明定理 18.6 的(4)与(5).(提示:注意 $4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$)

2. 设 D 为有界可测集, f 在 D 上可积,且 $M\geqslant f\geqslant m>0$,证明 $\dfrac{1}{f}$ 在 D 上可积. 又 g 在 D 上有界、可积,证明 $\max(f, g)$ 和 $\min(f, g)$ 在 D 上可积.

3. 设 $f(x, y)$ 在有界可测区域 D 上连续、非负,且不恒为 0,证明 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma > 0$.

§ 3 化重积分为累次积分

3.1 化二重积分为累次积分的公式

先讨论矩形域上重积分计算,然后推出一般区域上重积分计算.

定理 18.7 设 $f(x, y)$ 在矩形域 $D=[a, b]\times[c, d]$ 上可积,对每个 $x\in[a, b]$,单积分 $I(x)=\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 存在,则累次积分 $\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y$ 也存在,且

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y. \quad ①$$

证明 定理要证 $I(x)$在$[a, b]$上可积,且积分值等于二重积分. 为此,对区间$[a, b]$, $[c, d]$分别作分法:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

按这些分点作直线把 D 分割成 nm 个小矩形 $\Delta\sigma_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] (i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$,它们构成 D 的一个分法 Δ. 任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, 2, \cdots, n)$, $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$ $(j=1, 2, \cdots, m)$,显然 $(\xi_i, \eta_j) \in \Delta\sigma_{ij}$ $(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$. 由二重积分存在,得

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i=1, 2, \cdots, n)$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1} (j=1, 2, \cdots, m)$.

令 $\lambda_1 = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta x_i$, $\lambda_2 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \Delta y_j$,则 $\|\Delta\| \to 0$ 当且仅当 $\lambda_1 \to 0$, $\lambda_2 \to 0$. 又由单积分存在,得

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_2 \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j \Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \int_c^d f(\xi_i, y) \mathrm{d}y \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i.\end{aligned}$$

根据全面极限与累次极限定理,可得

$$\lim_{\lambda_1 \to 0} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

即

$$\int_a^b I(x) \mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y = \iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \quad \text{证毕.}$$

若定理中 $\int_c^d f(x, y) \mathrm{d}y$ 存在改为对每个 $y \in [c, d]$, $I(y) = \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x$ 存在,则有

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y) \mathrm{d}x. \qquad ②$$

特别地,若 $f(x, y)$ 在矩形域 D 上连续,则重积分和单积分都存在,因此有

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

注 定理中单积分的存在性,不能从重积分的存在性推出.例如考虑 $D=(0, 1)\times(0, 1)$ 上的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{当 } x = \dfrac{r}{p}\ (r, p \text{ 互素}),\ y \text{ 为无理数}, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } y = \dfrac{s}{q}\ (s, q \text{ 互素}),\ x \text{ 为无理数}, \\ 0, & \text{当 } x, y \text{ 同为有理数或无理数}. \end{cases}$$

先说明 $f(x, y)$ 在 D 上可积. $\forall \varepsilon>0$,函数 $f(x, y)$ 只在有限条直线段上的值大于 ε. 记此有限条线段集合为 E,则 $mE=0$,所以存在简单图形 Q,满足

$$E \subset Q^\circ,\ mQ < \varepsilon.$$

取 $\Delta\sigma_1=D\cap Q$, $\Delta\sigma_2=D\setminus Q$,得 D 的一个分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2\}$,函数在 $\Delta\sigma_1$ 上的振幅 $\omega_1\leqslant 1$,在 $\Delta\sigma_2$ 上的振幅 $\omega_2\leqslant\varepsilon$,于是有

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{2}\omega_i\Delta\sigma_i \leqslant 1\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot 1 = 2\varepsilon.$$

根据定理 18.3 的(3),知 $f(x, y)$ 在 D 上可积,但对固定的 $y=\dfrac{s}{q}\in(0, 1)$,一元函数

$$f\left(x, \frac{s}{q}\right) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

在 $(0, 1)$ 上不可积.

对一般区域上求函数的重积分可化为矩形域来处理.

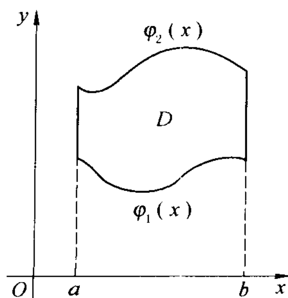


图 18-5

定理 18.8 设 D 为图 18-5 中区域,即 $D=\{(x, y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$,其中 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 在

$[a, b]$上连续(显然 D 为一可测集). 设 $f(x, y)$在 D 上可积,对每一 $x\in[a, b]$,单积分

$$I(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

存在,则

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

证明 令

$$c=\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_1(x),\ d=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\varphi_2(x),$$

则 D 包含在矩形 $R=[a, b]\times[c, d]$内,在 R 上定义函数

$$f^*(x, y)=\begin{cases}f(x, y), & (x, y)\in D,\\ 0, & (x, y)\in R\backslash D.\end{cases}$$

由定理 18.6 的(7),知 $f^*(x, y)$在 R 上可积,且

$$\iint_R f^*(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对每一 $x\in[a, b]$

$$\int_c^d f^*(x, y)\mathrm{d}y=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y$$

存在,根据定理 18.7,得

$$\iint_R f^*(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f^*(x, y)\mathrm{d}y,$$

即得

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$ 证毕.

类似地,若 D 由图 18-6 所示,即 $D=\{(x, y)\mid c\leqslant y\leqslant d, \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$,其中 $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$在$[c, d]$上连续, $f(x, y)$在 D 上可积,对每个 $y\in[c, d]$

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x$$

存在,则

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c}^{d}\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

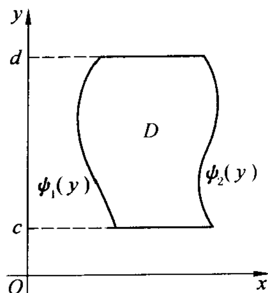


图 18-6

对更一般的区域 D,我们可用平行于 y 轴的线段,把 D 分成若干个图 18-5 中区域;或用平行于 x 轴的线段,把 D 分割成若干个图 18-6 中的区域. 求 D 上重积分也就归结为求图 18-5 或图 18-6 中区域上的重积分.

3.2 公式的应用

有了上述二重积分化累次积分公式,二重积分计算问题化为求两次定积分.

例 1 设 D 是由直线 $y=0$, $x=1$ 和 $y=x$ 围成,计算

$$I = \iint\limits_{D} \sqrt{4x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 画出区域 D,由图 18-7(1)看出

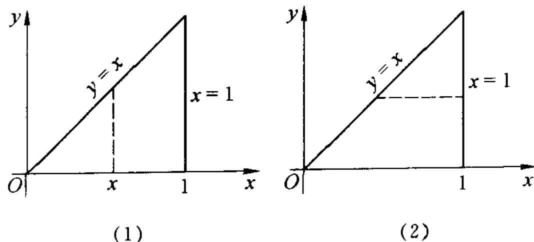


图 18-7

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\},$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+2x^2\arcsin\frac{y}{2x}\right]_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

由图 18-8(2)看出，$D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant 1\}$，所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x\sqrt{4x^2-y^2}-\frac{y^2}{2}\ln\left(2x+\sqrt{4x^2-y^2}\right)\right]_{x=y}^{x=1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\sqrt{4-y^2}-\sqrt{3}y^2-\frac{y^2}{2}\ln\left(2+\sqrt{4-y^2}\right)\right.\\&\qquad\left.+\frac{y^2}{2}\ln(2+\sqrt{3})y\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

为求 I 还得作复杂的计算.由此例看出，累次积分顺序不同，计算的难易与复杂程度可以有很大差别，所以求重积分时，要注意选择一较好的积分顺序，并根据区域图形正确写出积分限.

例 2 设 D 由 $x^2+y^2=4$ 和 $y=-x^2+1$，$y=x^2-1$ ($|x|\leqslant 1$)所围成的区域，计算二重积分

$$I=\iint_D (x^2+y^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 画出 D 的图形(图 18-8).因 D 关于 x 轴对称，被积函数 y^3 关于 y 是奇函数，所以

$$\iint_D y^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

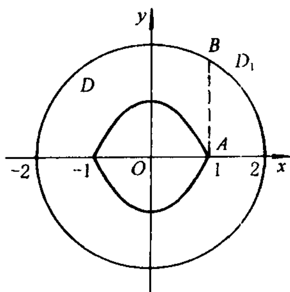


图 18-8

又因 D 关于 x 轴和 y 轴对称，被积函数 x^2 关于 x 和 y 都是偶函数，所以

$$I=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_1 是 D 在第一象限的子区域：

$$D_1=\{(x,y)\mid (x,y)\in D,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

用线段 AB 把 D_1 分成两个如图 18-5 中的区域，则有

$$I=4\iint_{D_1} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x^2}^{\sqrt{4-x^2}}x^2\,\mathrm{d}y+4\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}x^2\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}x^2\,\mathrm{d}y-4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2}x^2\,\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x-4\int_0^1 x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$=64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2t\cos^2t\,\mathrm{d}t-\frac{8}{15}$$

$$=32\mathrm{B}\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)-\frac{8}{15}=4\pi-\frac{8}{15}.$$

例 3 设 D 是由 $y=x$ 和 $y=x^2$ 围成的区域，求

$$I=\iint_D\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

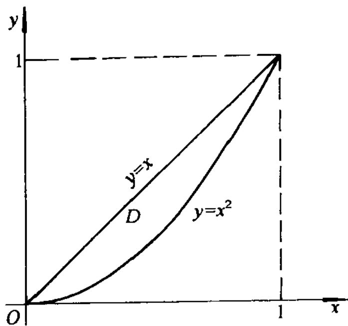


图 18-9

解 画出区域 D 的图形，D 可表示为：

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant x\},$$

所以

$$I=\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-x)\sin x\mathrm{d}x=1-\sin 1.$$

注 D 也可表示为

$$D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\},$$

这时

$$I=\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,$$

内层积分由于无初等原函数,故无法计算.此例说明正确选择累次积分顺序,关系到能不能求出积分值.

例 4 设 $p(x)$在$[a,\ b]$上可积,且 $p(x)\geqslant 0$,函数 $f(x)$、$g(x)$在$[a,\ b]$上单调递增,证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 我们利用矩形 $D=[a,\ b]\times[a,\ b]$上的重积分来证差式

$$\Delta=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)\mathrm{d}x$$

$$-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

注意到$[a,\ b]$上一元可积函数可视作 D 上二元可积函数,于是有

$$\Delta=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)\mathrm{d}y$$

$$-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D p(x)p(y)f(x)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由 x, y 的对称性,同样可得

$$\Delta = \iint_D p(x)p(y)f(y)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将上两式相加再除 2,得

$$\Delta = \frac{1}{2}\iint_D p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增,故上式两个方括号同号,即上式被积函数在 D 上取非负值,因而有 $\Delta \geqslant 0$.

思考练习 解答下列问题:

1. $D=\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$,求下列积分:

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. D 同上,求 $\displaystyle\iint_D x^y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 计算下列二重积分.

(1) D 是由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 与 $y\geqslant |x|$ 所示的区域,求

$$\iint_D \sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(2) D 是由 $y^2=2px$ $(p>0)$ 与 $x=\dfrac{p}{2}$ 所围区域,求

$$\iint_D x^m y^n\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ (m>0,\ n \text{ 为正整数});$$

(3) $D=\{(x, y) \mid 0\leqslant x\leqslant y^2, 0\leqslant y\leqslant 2+x, x\leqslant 2\}$,求

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(4) D 是由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=0$ 所围成,求

$$\iint_D (x^2+3xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(5) D 是由 $y=e^x$, $y=1$, $x=0$ 与 $x=1$ 所围成,求

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(6) D 是由$(1, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$和$(4, 3)$为顶点的四边形,求

$$\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

(7) D 是由 $y=x^2$, $y=4x$ 和 $y=4$ 所围成,求 $\iint_D \sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 在下列积分中改变积分顺序:

(1) $\int_1^e \mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f\mathrm{d}y$;　　(2) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{y^2}^{3y} f\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f\mathrm{d}y$;　　(4) $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^2 f\mathrm{d}y$.

5. 计算下列积分:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

6. 求下列立体 V 的体积:

(1) V 是由曲面 $z=xy$ 和 $z=0$, $x+y=1$ 平面围成;

(2) V 是由曲面 $z=xy$ 和平面 $x+y+z=1$ 与 $z=0$ 所围成;

(3) V 是由柱面 $y^2+z^2=1$ 和平面 $|x+y|=1$ 与 $|x-y|=1$ 所围成.

7. 设 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上可积,利用重积分证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

8. 例 4 中若 $g(x)$在$[a, b]$上单调递减,其余条件不变. 证明:

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}z$$

$$\geqslant \int_a^b p(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

9. 设 $f(x, y)$在 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 上可积, $0<h<R$,令

$$F(\xi, \eta) = \iint\limits_{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant h^2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明: $F(\xi, \eta)$在 $\xi^2+\eta^2<(R-h)^2$ 上连续.

3.3 化三重积分为累次积分

类似于二重积分化累次积分,我们可以证明三重积分化累次积分公式,下面只叙述结果.

设空间区域 V 如图 18-10 所示:

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y)\},$$

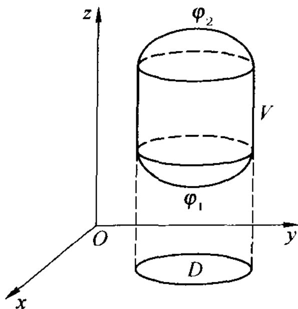


图 18-10

其中 D 是 V 在 xy 平面上的投影区域, $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$在 D 上连续. 若 D 是平面可测集,则 V 是空间可测集,设 $f(x, y, z)$在 V 上可积,对每一点$(x, y)\in D$, $f(x, y, z)$作为 z 的函数在$[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$上可积,则

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\mathrm{d}z.$$

若空间可测区域 V 如图 18-11 所示:

$$V = \{(x, y, z) \mid c \leqslant z \leqslant d, (x, y) \in D(z)\},$$

其中 $D(z)$为平面 $z=z$ 与 V 的交集,且为平面可测区域. 设

$f(x, y, z)$在V上可积,对每一$z\in[c, d]$, $f(x, y, z)$作为x, y的函数在$D(z)$上可积,则

$$\iiint_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \mathrm{d}z \iint_{D(z)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

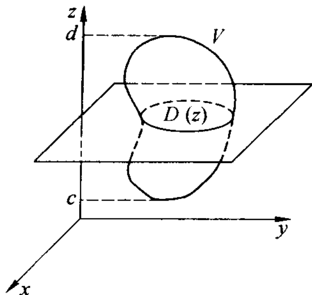


图 18-11

我们只给出对z求定积分,对x, y求重积分的公式.同样也有对$x(y)$求定积分,对y, $z(z, x)$求二重积分的公式.

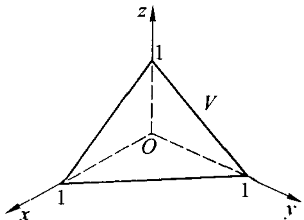
例 1 设V是由平面$x=0$, $y=0$, $z=0$和$x+y+z=1$所围成的区域,求

$$I = \iiint_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

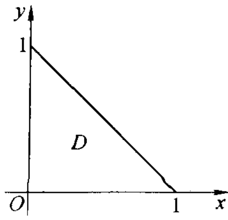
解 画出V和其在Oxy平面上投影区域D:
由图 18-12 看出

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1-x\},$$

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y\}.$$



(1)



(2)

图 18-12

所以

$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z^2\mathrm{d}z=\iint_D \frac{1}{3}z^3\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\iint_D(1-x-y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^3\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{12}\int_0^1(1-x)^4\mathrm{d}x=\frac{1}{60}.$$

又解 用 $z=z$ 平面去截区域 V,得一三角形域 $D(z)$(图 18-13):

$$D(z)=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1-z,\ 0\leqslant y\leqslant 1-x-z\}.$$

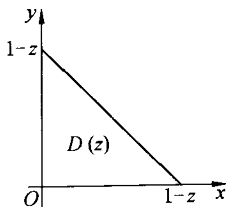


图 18-13

所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D(z)}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z^2\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z^2\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\mathrm{B}(3,3)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{\Gamma(6)}=\frac{1}{60}.$$

例 2 计算三重积分

$$I=\iiint_V(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 $I = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

注意到区域 V 关于 $x=0$ 平面对称，被积函数 $2xy$ 关于 x 是奇函数，所以

$$\iiint\limits_V 2xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

同理有

$$\iiint\limits_V 2yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V 2zx\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_V y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

根据变量轮换的对称性，我们只需计算 I_3.

画出 V 的图形，它是一椭球(图 18-14). 用 $z=z$ 平面去截此椭球，得一平面区域 $D(z)$，它为一椭圆：

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)} \leqslant 1.$$

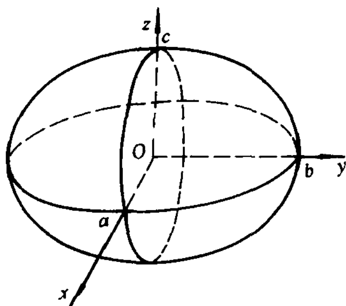


图 18-14

$D(z)$的面积为$\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. V 在 z 轴上的投影区间为$[-c, c]$,所以

$$I_3 = \iiint\limits_V z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} \mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-c}^{c} z^2 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

同理可得

$$I_1 = \frac{4}{15}\pi bca^3,\quad I_2 = \frac{4}{15}\pi cab^3.$$

最后得

$$I = \frac{4}{15}\pi abc(a^2+b^2+c^2).$$

从前两例看出,若被积函数不出现某个变量,则先对该变量积分比较有利.

思考练习 解答下列问题:

1. 改变下列累次积分的顺序(只写出 $\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}z$ 互换的顺序):

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y} f\mathrm{d}z$;

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2} f\mathrm{d}z$;

(3) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f\mathrm{d}z$;

(4) $\int_{-b}^{b} \mathrm{d}z\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}}\mathrm{d}y\int_0^{\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}} f\mathrm{d}x$.

2. 计算下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 是由曲面 $2z=x^2+y^2$ 与 $x^2+y^2+z^2=3$ 所围成的区域;

(2) $\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 是由曲面 $z=xy$, $y=x$, $x=1$,

$z=0$ 所围成;

(3) $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, V 是由平面 $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 所围成;

(4) $\iiint\limits_V \cos az\,dxdydz$, V: $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$;

(5) $\iiint\limits_V (1+x^4)dxdydz$, V 是由曲面: $x^2=y^2+z^2$, $x=2$, $x=1$ 所围成.

3. 计算三重积分

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_y^1 y\sqrt{1+z^4}\,dz.$$

4. $D=\{(x, y, z)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$, n 为自然数,求下列积分:

(1) $\iiint\limits_D \frac{x^n+y^n-z^n}{x^n+y^n+z^n}dxdydz$;

(2) $\iiint\limits_D \frac{x^n-y^n-z^n}{x^n+y^n+z^n}dxdydz$.

5. 求由曲面 $(x^2+z^2)^2+y^4=y$ 所围立体体积.

§4 重积分的变量替换

4.1 二重积分的变量替换公式

设 Ω, G 为由逐段光滑曲线围成的区域,由于边界是可求长曲线,所以 Ω, G 是有界可测区域. 变换

$$T:\begin{cases}x=x(u, v),\\ y=y(u, v),\end{cases}\quad G\to\Omega$$

是同胚变换,且 $T\in C^{(2)}(\bar{G})$(即函数和一阶、二阶偏导数可连续开拓到闭区域),可以证明变换 T 把边界 ∂G 映满边界 $\partial\Omega$,但不一定是一一的. 变换 T 的 Jacobi 行列式记为

$$J(u, v)=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

由第十四章知,它在 $\overline{G}$ 上连续且不变号. 设函数 $f(x, y)$ 在 $D=\overline{\Omega}$上可积(等价于 f 在 Ω 上可积),则有二重积分变换公式:

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G f[x(u, v), y(u, v)] \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

为证此公式,需先建立一个引理.

引理 18.2 设 σ 为 G 内一闭正方形,左下顶点为(u_0, v_0),边长为 h(图 18-15),经 T 映为 Ω 内一曲边四边形 $T(\sigma)$记其面积为 $mT(\sigma)$,则有

$$mT(\sigma) = \iint_\sigma \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

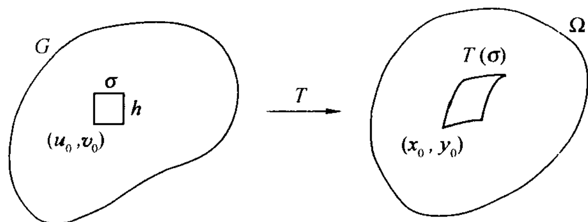


图 18-15

证明 证明前先复习定积分求面积的应用. 设曲线 AB 由参数方程

$$x = x(t), \ y = y(t)$$

给出,起点 A 对应参数 $t=\alpha$,终点 B 对应参数 $t=\beta$. 则积分

$$\frac{1}{2}\int_{\widehat{AB}} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]\mathrm{d}t$$

$$=\pm(\text{曲边扇形 } OAB \text{ 的面积}).$$

正负号的选取是由向量(x, y)与$(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$叉乘的右手定则来决定,如$\widehat{AB}$为逆时针方向时,公式前取正号; $\widehat{AB}$为顺时针方向时,公式前取负号.

若区域 σ 由四条曲线围成,则四个有向曲边扇形面积之和,正好是 σ 的有向面积:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\sigma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \pm(\sigma\text{的面积}).$$

当 σ 边界 $\partial\sigma$ 为逆时针方向时,公式前取正号; $\partial\sigma$ 为顺时针方向时,公式前取负号.先设 $J(u, v)\geqslant 0$,则 T 把 σ 边界曲线的正定向映为 $T(\sigma)$ 边界曲线的正定向.由定积分应用,若已知 $T(\sigma)$ 边界曲线的参数方程,则其面积为

$$mT(\sigma) = \frac{1}{2}\int_{\partial T(\sigma)} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

现边界曲线四段参数方程不一样,因此要分段计算上述积分,得

$$\begin{aligned}2mT(\sigma) = &\int_{u_0}^{u_0+h}\left[x(u,v_0)\frac{\partial y(u,v_0)}{\partial u} - y(u,v_0)\frac{\partial x(u,v_0)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u \\ &+\int_{v_0}^{v_0+h}\left[x(u_0+h,v)\frac{\partial y(u_0+h,v)}{\partial v}\right. \\ &\left.-y(u_0+h,v)\frac{\partial x(u_0+h,v)}{\partial v}\right]\mathrm{d}v \\ &+\int_{u_0+h}^{u_0}\left[x(u,v_0+h)\frac{\partial y(u,v_0+h)}{\partial u}\right. \\ &\left.-y(u,v_0+h)\frac{\partial x(u,v_0+h)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u \\ &+\int_{v_0+h}^{v_0}\left[x(u_0,v)\frac{\partial y(u_0,v)}{\partial v}\right. \\ &\left.-y(u_0,v)\frac{\partial x(u_0,v)}{\partial v}\right]\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

对上面八个积分两两配对应用定积分基本定理,如

$$\begin{aligned}&-\int_{u_0}^{u_0+h}\left[x(u,v_0+h)\frac{\partial y(u,v_0+h)}{\partial u} - x(u,v_0)\frac{\partial y(u,v_0)}{\partial u}\right]\mathrm{d}u \\ =&-\int_{u_0}^{u_0+h}\mathrm{d}u\int_{v_0}^{v_0+h}\left[\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\,\frac{\partial y(u,v)}{\partial u} + x(u,v)\,\frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial v\partial u}\right]\mathrm{d}v \\ =&-\iint_{\sigma}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

对其余六个积分同样处理,可得

$$2mT(\sigma) = -\iint_{\sigma}\left[\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial y}{\partial u} + x\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial u}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$+\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+y\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$+\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+x\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$-\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+y\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=2\iint\limits_{\sigma}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以有

$$mT(\sigma)=\iint\limits_{\sigma}J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

若 $J(u,v)\leqslant 0$,则 T 把 $\partial\sigma$ 的正定向映为 $\partial T(\sigma)$ 的负定向,这时

$$mT(\sigma)=-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial T(\sigma)}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-\iint\limits_{\sigma}J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

最后得

$$mT(\sigma)=\iint\limits_{\sigma}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\quad \text{证毕.}$$

定理 18.9 设变换 T: $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 为有界可测区域 G, Ω 间的同胚变换, $T\in C^{(2)}(\bar{G})$, $J(u,v)$ 为变换 T 的 Jacobi 行列式, $f(x,y)$ 在 $D=\bar{\Omega}$ 上可积分,则有

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证明 因 f 在 D 上可积等价于 f 在 Ω 上可积,且

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以只要证

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{G}f[x(u,v),y(u,v)]\,|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

为此用间距为 h 的平行直线网把 G 分成若干个小可测集 $\Delta\sigma_i$,在变换 T 映射下,相应地 Ω 被分割成若干个小可测集

$T(\Delta\sigma_i)$,记此分法为 Δ,由 T 在 $\overline{G}$ 上一致连续,所以当 $h\to 0$ 时,分法 Δ 的直径 $\|\Delta\|\to 0$(图 18-16).

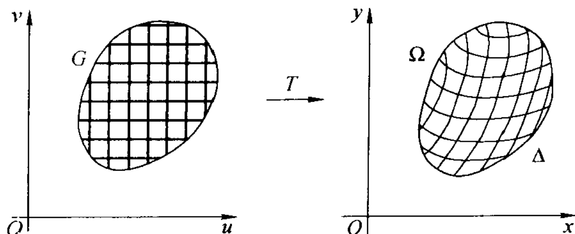


图 18-16

在 G 的分法中,记内部网格或闭小正方形为

$$\{\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}.$$

其面积 $\Delta\sigma_i=h^2(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,相应地 $T(\Delta\sigma_i)$ 也是 Ω 的 Δ 分法中的内部元素. 由引理 18.2 与重积分的中值定理,得

$$mT(\Delta\sigma_i)=|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\Delta\sigma_i,$$

其中 $(\overline{u_i},\ \overline{v_i})\in\Delta\sigma_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

在每一 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(u_i,\ v_i)\in\Delta\sigma_i$,变换 T 把 $(u_i,\ v_i)$ 映为点 $(x_i,\ y_i)\in T(\Delta\sigma_i)$,其中

$$x_i=x(u_i,\ v_i),\ y_i=y(u_i,\ v_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

由 $f(x,\ y)$ 在 Ω 上可积和推论 18.4,得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\Delta\sigma_i\\=&\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,\ y_i)mT(\Delta\sigma_i)=\iint_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

容易证明

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\Big\{&\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\Delta\sigma_i\\&-\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]|J(u_i,\ v_i)|\Delta\sigma_i\Big\}=0,\end{aligned}$$

事实上,任给 $\varepsilon>0$,由 $|J(u,\ v)|$ 在 $\overline{G}$ 上一致连续,$\exists\,\delta>0$,当

$\sqrt{(u_i-\overline{u_i})^2+(v_i-\overline{v_i})^2}<\delta$ 时,有

$$\left||J(u_i,\ v_i)|-|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\right|<\frac{\varepsilon}{M\cdot mG},$$

其中 M 为 $f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]$ 在 G 上的界, mG 表示 G 的面积,所以当 $h<\frac{\delta}{\sqrt{2}}$ 时,有

$$\Big|\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]\,|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\,\Delta\sigma_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]\,|J(u_i,\ v_i)|\,\Delta\sigma_i\Big|<\varepsilon,$$

即得

$$\lim_{h\to 0}\Big\{\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]\,|J(\overline{u_i},\ \overline{v_i})|\,\Delta\sigma_i$$
$$-\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]\,|J(u_i,\ v_i)|\,\Delta\sigma_i\Big\}=0.$$

所以有

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n}f[x(u_i,\ v_i),\ y(u_i,\ v_i)]\,|J(u_i,\ v_i)|\,\Delta\sigma_i$$
$$=\iint_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

再由推论 18.4,即知函数 $f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]\,|J(u,\ v)|$ 在 G 上可积,且

$$\iint_{G}f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]\,|J(u,\ v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_{\Omega}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证毕.

为了更好理解定理的条件,我们考察平面极坐标变换 T: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,设

$$G=\{(r,\ \theta)\mid 0<\theta<2\pi,\ 0<r<R\},$$

Ω 为开圆 $x^2+y^2<R^2$ 除去 x 轴上线段$[0,\ R]$,则 T: $G\to\Omega$ 同胚(图 18-17),且 $T\in C^{(2)}(\overline{G})$,变换 T 的 Jacobi 行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r.$$

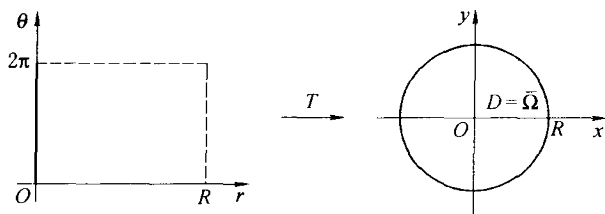


图 18-17

$D=\overline{\Omega}$为闭圆$x^2+y^2\leqslant R^2$,若$f(x, y)$在D上可积,由定理18.9得

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

注 把定理18.9中条件$T\in C^{(2)}(\overline{G})$改为$T\in C^{(1)}(\overline{G})$和Jacobi行列式$J>0$时,定理的结论仍成立.

思考练习 解答下列问题:

1. 在(u_0, v_0)邻域变换T用仿射变换

$$\begin{cases} x=x_0+\dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial u}(u-u_0)+\dfrac{\partial x(u_0, v_0)}{\partial v}(v-v_0), \\ y=y_0+\dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial u}(u-u_0)+\dfrac{\partial y(u_0, v_0)}{\partial v}(v-v_0) \end{cases}$$

代替,这时σ映为什么图形,并求该图形面积.

2. 利用第十五章的推论15.2,证明变换$T: G\to\Omega$一定把边界∂G映满边界$\partial\Omega$.

4.2 公式的应用

例1 计算积分

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中D是由$(x-a)^2+y^2=a^2\ (y>0)$, $(x-2a)^2+y^2=4a^2\ (y>0)$和$y=x$围成的区域.

解 画出 D 的图形,并把 D 的边界曲线方程化为极坐标方程

$$r = 2a\cos\theta,\ r = 4a\cos\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}$$

(图 18-18). 所以通过极坐标变换

$$T:\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,$$

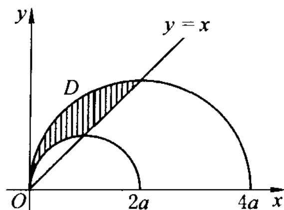


图 18-18

有

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{T^{-1}(D)} r\cdot r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta} r^2\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \Big|_{2a\cos\theta}^{4a\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{56}{3}a^3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{112-70\sqrt{2}}{9}a^3.$$

例 2 计算由椭球抛物面 $z=x^2+2y^2$ 及抛物面 $z=2-x^2$ 所围立体的体积.

解 画出所求立体的图形(图 18-19),先求此立体在 Oxy 平面上的投影区域 D,因 D 的边界曲线是两曲面的交线

$$\begin{cases} z = x^2+2y^2, \\ z = 2-x^2 \end{cases}$$

在 Oxy 平面上的投影,所以从上述方程组中消去 z,即得 D 的边界曲线方程 $x^2+2y^2=2-x^2$,或 $x^2+y^2=1$. 故所求立体的体积 V 为:

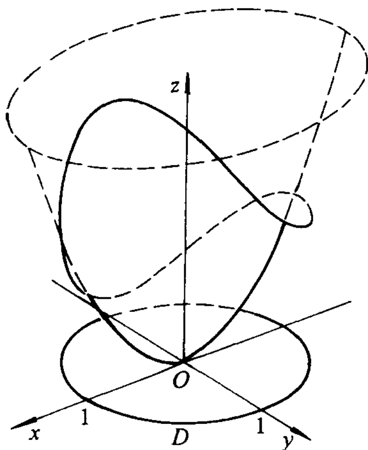


图 18-19

$$V=\iint_D(2-x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2\iint_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r$$
$$=2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]\Big|_0^1\mathrm{d}\theta=\pi.$$

例 3 计算二重积分

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由抛物线 $y^2=x$, $y^2=4x$, $x^2=y$, $x^2=4y$ 所围成的区域.

解 画出 D 的图形(图 18-20). 根据 D 的特点,作变换

$$T^{-1}: u=\frac{y^2}{x}, v=\frac{x^2}{y}.$$

它把 D 一一地映为正方形区域 $T^{-1}(D)$: $1\leqslant u\leqslant 4$, $1\leqslant v\leqslant 4$.

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}-\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x}\\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3,$$

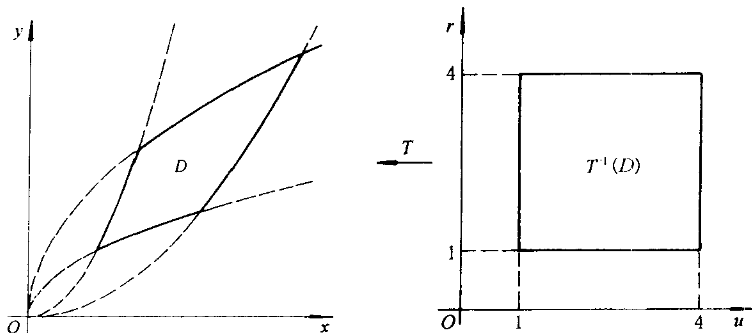


图 18-20

因 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$,所以

$$|J(u,v)|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{3}.$$

又

$$u\cdot v=\frac{y^2}{x}\cdot\frac{x^2}{y}=x\cdot y,$$

故有

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{T^{-1}(D)}uv\,\frac{1}{3}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_1^4 u\mathrm{d}u\int_1^4 v\mathrm{d}v=\frac{75}{4}.$$

例 4 计算二重积分

$$\iint\limits_D\sqrt{\frac{xy}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ 所围成的区域.

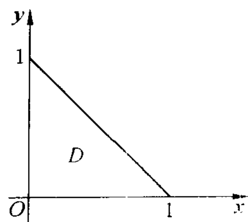


图 18-21

解 作变换 $T: x=r\cos^2\theta, y=r\sin^2\theta$. 它把区域 G: $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, $0<r<1$ 一一地映为区域 $\Omega=D^\circ$(图 18-21).

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos^2\theta & -2r\cos\theta\sin\theta\\ \sin^2\theta & 2r\sin\theta\cos\theta\end{vmatrix}=2r\sin\theta\cos\theta.$$

所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\,dxdy = \iint_G r^{\frac{1}{2}}\cos\theta\sin\theta \cdot 2r\cos\theta\sin\theta d\theta dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta d\theta \cdot \int_0^1 r^{\frac{3}{2}}dr = \frac{2}{5}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{20}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{20}.$$

又解 在变换 $x = r\cos^2\theta$, $y = r\sin^2\theta$ 中,若令 $u = r$, $v = \sin^2\theta$,由此演化成变换 T: $x = u(1-v)$, $y = uv$,它把区域 G: $0<u<1$, $0<v<1$ 一一地映为区域 $\Omega = D^\circ$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1-u & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}\,dxdy = \iint_G \sqrt{(1-v)uv}\cdot u\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}du \cdot \int_0^1 v^{\frac{1}{2}}(1-v)^{\frac{1}{2}}dv$$

$$= \frac{2}{5}B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{20}.$$

例 5 证明 B 函数与 Γ 函数的联系公式:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p>0,\ q>0).$$

证明 已知 $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$ 有递推公式

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 有递推公式

$$B(p+1,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}B(p,q).$$

利用递推公式,只需对联系公式当 $p>1$, $q>1$ 证明即成. 为此我们考虑第一象限上非负函数

$$f(x, y) = x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}.$$

和三个闭区域 D_1: $0\leqslant x$、$y\leqslant\frac{R}{2}$; D_2: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant R$; D_3: $0\leqslant x$、$y\leqslant R$ (图 18-22). 由二重积分的几何意义,显然有

$$\iint_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_3} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

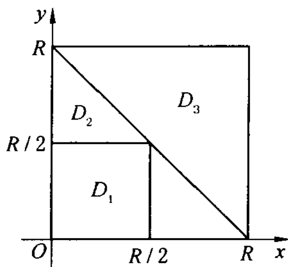


图 18-22

在 D_1, D_3 上的二重积分可化为两个定积分的积:

$$\iint_{D_1} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{R}{2}} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{R}{2}} y^{q-1}e^{-y}\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{D_3} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{R} x^{p-1}e^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{R} y^{q-1}e^{-y}\mathrm{d}y.$$

D_2 上的积分作变换 T: $x=u(1-v)$, $y=uv$, $J=u$,所以

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}v^{q-1}(1-v)^{p-1}\mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}\mathrm{d}v \cdot \int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{B}(p, q)\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

因此我们得到不等式

$$\int_0^{\frac{R}{2}} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{R}{2}} y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \leqslant \mathrm{B}(p,\ q)\int_0^R u^{p+q-1}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$\leqslant \int_0^R x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \cdot \int_0^R y^{q-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y.$$

上式中令 $R\to+\infty$,即得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) \leqslant \mathrm{B}(p,\ q)\Gamma(p+q) \leqslant \Gamma(p)\Gamma(q),$$

或

$$\mathrm{B}(p,\ q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p>1,\ q>1).$$

思考练习 解答下列问题:

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$围成的区域;

(2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由曲线$(x^2+y^2)^2=2xy$ 围成;

(3) $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由阿基米德螺线 $r=\theta$ 和半射线 $\theta=\pi$ 围成;

(4) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$D$ 是由对数螺线 $r=\mathrm{e}^{\theta}$ 和半射线 $\theta=0$,$\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成.

2. 求下列曲面围成的体积:

(1) $z=xy$, $x^2+y^2=a^2$, $z=0$;

(2) $z=x^2+y^2$, $x+y+z=1$;

(3) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$.

3. 求下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$;

(2) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, D: $x^4+y^4\leqslant 1$;

(3) $\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $y=4x^2$，$y=9x^2$，$x=4y^2$，$x=9y^2$ 围成；

(4) $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $xy=2$，$xy=4$，$y=x$，$y=2x$ 围成.

4. 设 p、q、$s\geqslant 0$，证明：

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 1}} x^p y^q (1-x-y)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+s+3)}.$$

5. D 是以 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3) 为顶点的三角形，其面积为 $A(>0)$，求

(1) $\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　(2) $\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

6. 求证积分

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \ln\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} \pi\ln\dfrac{1}{h}, & h>1; \\ \dfrac{\pi}{2}(1-h^2), & 0<h\leqslant 1. \end{cases}$$

7. 取 D_1：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^2+y^2\leqslant R^2$；D_2：$0\leqslant x\leqslant R$，$0\leqslant y\leqslant R$；D_3：$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$x^2+y^2\leqslant 2R^2$. $f(x, y)=4x^{2p-1}y^{2q-1}\cdot \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. 仿照例 5 证明：

$$\mathrm{B}(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

8. 设 $A>0$，$AC-B^2>0$，通过变换 $u=x+\dfrac{B}{A}y$，$v=y$ 求曲线 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 所围图形的面积.

4.3 三重积分的变量替换

设 G, Ω 是 (x, y, z) 空间中的有界可测区域,变换

$$T:\begin{cases}x = x(u, v, w),\\ y = y(u, v, w), \quad G \to \Omega\\ z = z(u, v, w)\end{cases}$$

是同胚变换,且 $T\in C^{(2)}(\bar{G})$,它的 Jacobi 行列式记为

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}.$$

若 $f(x, y, z)$ 在 $V=\bar{\Omega}$ 上可积,则有

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_G f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \cdot |J(u, v, w)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

例 1 计算三重积分

$$\iiint\limits_V xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由曲面 $z=\dfrac{x^2+y^2}{m}$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{n}$, $xy=a^2$, $xy=b^2$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ 0<m<n)$围成且位于第一象限的闭区域.

解 考虑变换 T^{-1}:

$$u=\frac{z}{x^2+y^2},\ v=xy,\ w=\frac{y}{x},\ (x, y, z)\in\Omega=V^{\circ},$$

变换 T 为:

$$x=\sqrt{\frac{v}{w}},\ y=\sqrt{vw},\ z=uv\left(w+\frac{1}{w}\right),\ (u, v, w)\in G,$$

其中

$$G=\left\{(u, v, w)\,\middle|\,\frac{1}{n}<u<\frac{1}{m},\ a^2<v<b^2,\ \alpha<w<\beta\right\}.$$

(此变换保持边界间仍一一对应)变换 T 的 Jacobi 行列式

$$J(u, v, w)=\frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right)>0.$$

于是有

$$\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_G \sqrt{\frac{v}{w}} \cdot \sqrt{vw} \cdot uv\left(w+\frac{1}{w}\right) \cdot \frac{v}{2w}\left(w+\frac{1}{w}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2}\iiint_G uv^3\left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} u\,\mathrm{d}u \cdot \int_{a^2}^{b^2} v^3\,\mathrm{d}v \cdot \int_{\alpha}^{\beta}\left(w+\frac{2}{w}+\frac{1}{w^3}\right)\mathrm{d}w$$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)(b^8-a^8)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

例 2 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}>0$, $f(x)$在$[-h, h]$上连续,证明

$$\iiint_V f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1}(1-\zeta^2)f(h\zeta)\mathrm{d}\zeta,$$

其中 V: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

证明 选 ζ 轴方向为平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ 之单位法向量,再选取 ξ, η 轴为此平面上之两垂直轴. 构造正交变换

$$T^{-1}:\begin{cases}\xi = a_1x+b_1y+c_1z,\\ \eta = a_2x+b_2y+c_2z,\\ \zeta = \dfrac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z).\end{cases}$$

由于 T^{-1}是正交变换,故有

$$\left|\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}\right| = 1.$$

所以

$$|J(\xi, \eta, \zeta)| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)}\right| = 1.$$

变换 T 把 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1$ 变为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,于是有

$$\iiint_V f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant 1} f(h\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\zeta \iint\limits_{\xi^2+\eta^2 \leqslant 1-\zeta^2} f(h\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} (1-\zeta^2) f(h\zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

下面讨论两种常用的三重积分变换.

(一) 柱坐标变换

令

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

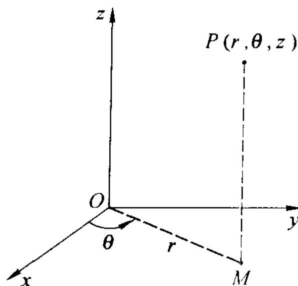


图 18-23

其中(r, θ)为空间点 P 在 xy 平面上投影点 M 的极坐标(图 18-23),称(r, θ, z)为空间一点 P 的柱面坐标,变换 T 的 Jacobi 行列式为:

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r > 0.$$

变换 T 把区域

$$H = \{(r, \theta, z) \mid 0 < r < +\infty,\ 0 < \theta < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}$$

一一地映为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 除去一闭半平面 $\theta=0$,记此区域为 R,且 $T \in C^{(2)}(\overline{H})$. 设 V 是(x, y, z)空间中闭区域, $f(x, y, z)$在 V 上可积,取 $\Omega = V^\circ \cap R$,若 T^{-1} 把 Ω 映为 H 中子域 G,则有变换公式:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

实际应用公式时,不必画出区域 G,而是用如下办法确定积分限:设用 $\theta=\theta$ 的半平面去截区域 V,得一平面区域 $D(\theta)$,又半平面从 $\theta=\alpha$ 绕 z 轴旋转到 $\theta=\beta$ 时,这些 $D(\theta)$构成区域 V(即 V 夹在半平面 $\theta=\alpha$ 与 $\theta=\beta$ 之间),则有公式

$$\iiint_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\iint_{D(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z.$$

例 3 计算三重积分

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的区域.

解 画出 V 和 $D(\theta)$ 的图形(图 18-24),并将 V 的边界方程化为柱坐标中方程:

$$r^2+z^2=4,\ r^2=3z.$$

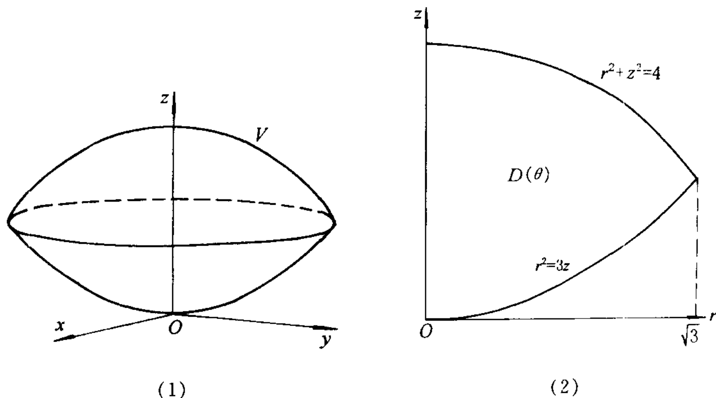


图 18-24

所以

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\iint_{D(\theta)} zr\mathrm{d}r\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{3}}\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rz\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{r}{2}\left(4-r^2-\frac{r^4}{9}\right)\mathrm{d}r=\frac{13}{4}\pi.$$

例 4 计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由锥面 $x^2+y^2=z^2$ 和平面 $z=1$ 围成.

解 画出 V 和 $D(\theta)$ 的图形(图 18-25),并将 V 的边界方程化为柱坐标中方程:

$$r = z,\ z = 1.$$

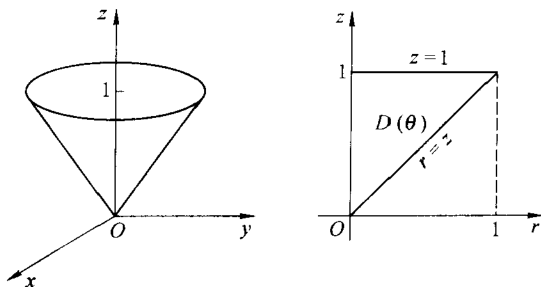


图 18-25

所以

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\iint_{D(\theta)} r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z r^2\,\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi\int_0^1 \frac{z^3}{3}\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}.$$

又解 用 $z=z$ 平面去截 V,得平面区域 $D(z)$,V 在 z 轴上的投影为 $[0,\ 1]$,所以

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}.$$

(二) 球坐标变换

令

$$T:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi. \end{cases}$$

如图 18-26 所示,三个数 $r,\ \varphi,\ \theta$ 确定空间中一点 P,称$(r,\ \varphi,\ \theta)$为 P 点的球坐标. 变换 T 把空间区域

$$H = \{(r,\ \varphi,\ \theta)\mid 0 < r < +\infty,\ 0 < \varphi < \pi,\ 0 < \theta < 2\pi\}$$

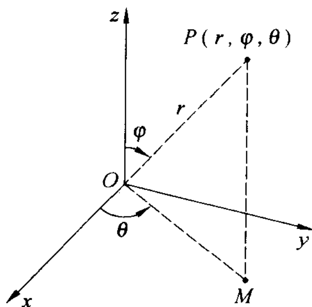


图 18-26

一一地映为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 除去 $\theta=0$ 的闭半平面,记此区域为 R,且 $T\in C^{(2)}(\overline{H})$,变换 T 的 Jacobi 行列式为

$$J(r,\ \varphi,\ \theta)=\begin{vmatrix}\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta\\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\varphi$$

设 V 是$(x,\ y,\ z)$空间中闭区域, $f(x,\ y,\ z)$在 V 上可积,取 $\Omega=V^\circ\cap R$, T^{-1} 把 Ω 映为 H 中子域 G,则有变换公式

$$\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_G f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

实际应用公式时,不必画出区域 G,而是用如下办法来确定积分限:设用 $\theta=\theta$ 的闭半平面去截 V,得一平面区域 $D(\theta)$,闭半平面从 $\theta=\alpha$ 绕 z 轴旋转到 $\theta=\beta$ 时,这些 $D(\theta)$ 构成区域 V,则有

$$\iiint\limits_{V^\cdot} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\iint\limits_{D(\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

例 5 计算三重积分

$$\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=2z$ 围成的区域.

解 画出 V 和 $D(\theta)$的图形(图 18-27),并将 V 的边界方程

化为球坐标下的方程：

$$r = 2\cos\varphi.$$

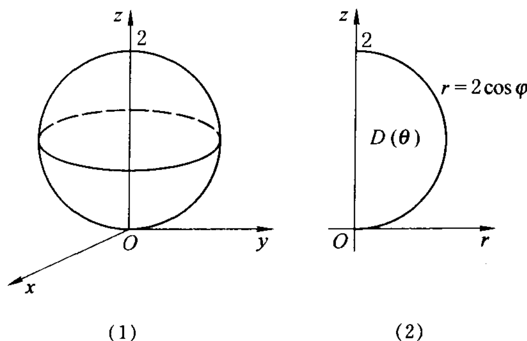


图 18-27

所以

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \iint\limits_{D(\theta)} r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\cos^5\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{32}{15}\pi.$$

例 6 计算三重积分

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

解 作广义球坐标变换：

$$T:\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, \\ z = cr\cos\varphi. \end{cases}$$

变换 T 的 Jacobi 行列式为

$$J(r,\varphi,\theta) = abcr^2\sin\varphi.$$

所以

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)$$

$$\cdot\, abcr^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{5}abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2}{15}abc\int_0^{2\pi}(2a^2\cos^2\theta+2b^2\sin^2\theta+c^2)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{15}abc(a^2+b^2+c^2)\pi.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 由以半径为 r、$r+\mathrm{d}r$ 的两圆柱面,角度为 θ、$\theta+\mathrm{d}\theta$ 的两半平面和高度为 z、$z+\mathrm{d}z$ 的两水平面围成的区域体积微元记作 $\mathrm{d}V$,把它看作长方体,证明 $\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r\cdot\mathrm{d}z$. (提示:$\Delta\theta=\mathrm{d}\theta$, $\Delta r=\mathrm{d}r$, $\Delta z=\mathrm{d}z$,小区域体积为 ΔV,略去关于 $\Delta\theta\Delta r\Delta z$ 的高阶无穷小,取 ΔV 的主部 $\mathrm{d}V$,则 $\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z$)

2. 由以半径为 r, $r+\mathrm{d}r$ 的两圆球面,角度为 θ, $\theta+\mathrm{d}\theta$ 的两半平面和顶角为 φ, $\varphi+\mathrm{d}\varphi$ 的两锥面所围成小区域体积微元记作 $\mathrm{d}V$,即忽略高阶无穷小项后,可以把看作长方体,证明

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\varphi\cdot r\sin\varphi\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r=r^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r.$$

3. 求椭球面 $x^2+2y^2+4z^2+2xy+2yz+2xz=1$ 所围区域的体积.

4. 求下列三重积分:

(1) $\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 是由曲面 $z=x^2+y^2$, $z=1$, $z=2$ 围成;

(2) $\iiint\limits_V(\sqrt{x^2+y^2})^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 是由曲面 $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $z^2=x^2+y^2(z\geqslant 0)$围成;

(3) $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, V 是由曲面 $z=16(x^2+y^2)$,

$z=4(x^2+y^2)$，$z=16$ 围成.

5. 求证积分

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}=\begin{cases}\dfrac{4\pi}{3h}, & h>1;\\ 2\pi\left(1-\dfrac{h^2}{3}\right), & 0<h\leqslant 1.\end{cases}$$

6. 求下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_V x^3yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$ 所确定；

(2) $\iiint\limits_V (\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由不等式 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$ 所确定；

(3) $\iiint\limits_V x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由 $x^2+y^2\leqslant z^2$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 8$ 所确定.

7. 计算积分

$$\iiint\limits_V \cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

8. 求下列三重积分

(1) $\iiint\limits_V y^4\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$ 是由 $x=az^2$，$x=bz^2$ $(0<a<b$，$z>0)$ $x=\alpha y$，$x=\beta y$ $(0<\alpha<\beta)$ 以及 $x=h$ $(h>0)$围成；

(2) $\iiint\limits_V \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$V$：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

9. 设一元函数 $f(t)\in C[0,+\infty)$，令

$$F(t)=\iiint\limits_{V_t} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V_t：$x^2+y^2+z^2\leqslant t^2$. 证明：

(1) $F(t)\in C^{(1)}[0,+\infty)$；　　(2) 求出 $F'(t)$的表达式.

§5 n 重积分

如同二维与三维情形一样,在 n 维空间区域 Ω 上的 n 重积分可化为累次定积分.

例 1 $\Omega=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1\}$,设函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与 Ω 上连续,试把 n 重积分

$$I=\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

化为累次积分.

解 先按 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ 的顺序化为累次积分. Ω 在 $n-1$ 维空间 $Ox_1x_2\cdots x_{n-1}$ 上的投影为 Ω_{n-1}:

$$\Omega_{n-1}=\{(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}) \mid 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant 1\},$$

这是因为 $\forall\,(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\in\Omega_{n-1}$, $\exists\, x_n$ 满足 $x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant 1$,所以点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n)\in\Omega$ 在 $n-1$ 维空间上的投影即为点 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$. 固定 $(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})\in\Omega_{n-1}$,变量 x_n 的变化范围从 $x_n=x_{n-1}$ 到 $x_n=1$,所以

$$I=\int_{\Omega_{n-1}}\cdots\int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}\int_{x_{n-1}}^{1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n.$$

由于 Ω_{n-1} 与 Ω 情形相似,这样依此下去得

$$I=\iint_{\Omega_2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\int_{x_2}^{1}\mathrm{d}x_3\cdots\int_{x_{n-1}}^{1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

其中 $\Omega_2=\{(x_1, x_2) \mid 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1\}$. 最后得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^{1}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^{1} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n$$

再按 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的顺序化为累次积分, Ω 在 $n-1$ 维空间 $Ox_2\cdots x_n$ 上的投影为 Ω_{n-1};

$$\Omega_{n-1}=\{(x_2, \cdots, x_n) \mid 0\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant 1\}.$$

这是因为 $\forall\,(x_2, \cdots, x_n)\in\Omega_{n-1}$, $\exists\, x_1$ 满足 $0\leqslant x_1\leqslant x_2$,所以点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\Omega$ 在 $n-1$ 维空间上的投影即为点 $(x_2, \cdots,$

$x_n)\in\Omega_{n-1}$. 反之, $\forall\ (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega$, 显然其投影$(x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega_{n-1}$.

固定$(x_2,\ \cdots,\ x_n)\in\Omega_{n-1}$,变量 x_1 的变化范围自 $x_1=0$ 到 $x_1=x_2$,所以

$$I=\int\cdots\int_{\Omega_{n-1}}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\int_0^{x_2}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mathrm{d}x_1.$$

由于 Ω_{n-1} 与 Ω 情形相似,这样依此下去得

$$I=\iint_{\Omega_2}\mathrm{d}x_n\mathrm{d}x_{n-1}\int_0^{x_{n-1}}\mathrm{d}x_{n-2}\cdots\int_0^{x_2}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mathrm{d}x_1,$$

其中 $\Omega_2=\{(x_{n-1},\ x_n)\mid 0\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant 1\}$,最后得

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_2}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mathrm{d}x_1.$$

注 1. 设 $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 的标准基,则例 1 中 Ω 是以 $\mathbf{0},\ \boldsymbol{e}_n,\ \boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{e}_{n-1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n+\boldsymbol{e}_{n-1}+\cdots+\boldsymbol{e}_1$ 为顶点的 $n+1$ 面体. 又如不等式 $0\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_1\leqslant 1$ 确定的闭域,是以 $\mathbf{0},\ \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\cdots+\boldsymbol{e}_n$ 为顶点的 $n+1$ 面体. n 维单位立方体可以剖分成 $n!$ 个 $n+1$ 面体,记为:

$$[\mathbf{0},\ \boldsymbol{e}_{i_1},\ \boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_{i_1}+\boldsymbol{e}_{i_2}+\cdots+\boldsymbol{e}_{i_n}],$$

数组$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n)$是数组$(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的某一置换或重排,显然数组$(1,\ 2,\ \cdots,\ n)$共有 $n!$ 个不同排列,相应地有 $n!$ 个 $n+1$ 面体.

2. n 重积分化累次积分时,上面做法是先求定积分,然后再求 $n-1$ 重积分. 也可以先求 $n-1$ 重积分,然后求定积分. 如按 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 顺序化为累次积分为例, Ω 在 x_n 轴上的投影区间为$[0,\ 1]$. 固定 $x_n\in[0,\ 1]$,用超平面 $x_n=x_n$ 去截 Ω,得一 $n-1$ 维区域 Ω_{n-1}:

$$\Omega_{n-1}=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1})\mid 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n\},$$

所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x_n\int\cdots\int_{\Omega_{n-1}}f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Ω_{n-1}在 x_{n-1} 轴上的投影区间为$[0,\ x_n]$,固定 $x_{n-1}\in[0,\ x_n]$,用超平面 $x_{n-1}=x_{n-1}$ 去截 Ω_{n-1},得一 $n-2$ 维区域 Ω_{n-2}:

$$\Omega_{n-1}=\{(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-2})\mid 0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{n-2}\leqslant x_{n-1}\}.$$

所以

$$I=\int_0^1 dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\int\cdots\int_{\Omega_{n-2}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_{n-2}.$$

依次下去可得

$$I=\int_0^1 dx_n\int_0^{x_n}dx_{n-1}\cdots\int_0^{x_2}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1.$$

下面讨论 n 重积分的变量替换,类似三维空间的球坐标变换

$$\begin{cases}z=r\cos\varphi,\\x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta.\end{cases}$$

$(0<r<+\infty,\ 0<\varphi<\pi,\ 0<\theta<2\pi)$,变换的 Jacobi 行列式

$$J=r^2\sin\varphi.$$

对 n 维空间我们也有球坐标变换:

$$\begin{cases}x_1=r\cos\theta_1,\\x_2=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\x_3=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3,\\\cdots\cdots\\x_{n-1}=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\cos\theta_{n-1},\\x_n=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1}.\end{cases}$$

$(0<r<+\infty,\ 0<\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_{n-2}<\pi,\ 0<\theta_{n-1}<2\pi)$. 我们证变换 T 的 Jacobi 行列式为:

$$J(r,\theta_1,\cdots,\theta_{n-1})=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}.$$

已知 $n=3$ 时上式成立. 假设 $n-1$ 时上式成立,来证 n 时上式成立. 为此将变换 T 拆成下列两个变换的复合

$$T_1:\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_2\cos y_3,\\x_3=y_2\sin y_3\cos y_4,\\\cdots\cdots\\x_{n-1}=y_2\sin y_3\sin y_4\cdots\cos y_n,\\x_n=y_2\sin y_3\sin y_4\cdots\sin y_n;\end{cases}\qquad T_2:\begin{cases}y_1=r\cos\theta_1,\\y_2=r\sin\theta_1,\\y_3=\theta_2,\\\cdots\cdots\\y_{n-1}=\theta_{n-2},\\y_n=\theta_{n-1}.\end{cases}$$

$T=T_1\circ T_2$,所以由归纳法假设得

$$
\begin{aligned}
J &= \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} \\
&= \left.\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}\right|_{T_2} \frac{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)}{\partial(r, \theta_1, \cdots, \theta_{n-1})} \\
&= (y_2^{n-2}\sin^{n-3}y_3\sin^{n-4}y_4\cdots\sin y_{n-1})\big|_{T_2}\cdot r \\
&= r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}.
\end{aligned}
$$

例 2 计算 n 维空间中半径为 R 的超球

$$\Omega:\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant R^2$$

的体积.

解 记 Ω 的体积为 V_n,则

$$
\begin{aligned}
V_n &= \idotsint\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta_{n-1}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_{n-2}\cdots\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_1\int_0^{R} r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2\pi}{n}R^n\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_1\int_0^{\pi}\sin^{n-3}\theta_2\,\mathrm{d}\theta_2\cdots\int_0^{\pi}\sin\theta_{n-2}\,\mathrm{d}\theta_{n-2} \\
&= \frac{2\pi}{n}R^n\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-2}{2}\right)\cdots\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, 1\right) \\
&= \frac{2\pi}{n}R^n\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&\quad\cdot\cdots\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
&= \frac{2\pi}{n}R^n\,\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n.
\end{aligned}
$$

若记半径为 R 的 n 维超球的表面积为 ω_n,则

$$\omega_n = \frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}R} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^{n-1}.$$

对三维空间中区域 Ω: $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, $x+y+z\leqslant R$ 常采用变换

$$\begin{cases} z = r\cos^2\varphi, \\ x = r\sin^2\varphi\cos^2\theta, \\ y = r\sin^2\varphi\sin^2\theta. \end{cases} \quad \left(0 < r < R,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$J = 4r^2\sin^3\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

若令 $u=r$, $u=\sin^2\varphi$, $w=\sin^2\theta$,上述变换演化成变换

$$\begin{cases} z = u(1-v), \\ x = uv(1-w), \\ y = uvw. \end{cases} \quad (0 < u < R,\ 0 < v < 1,\ 0 < w < 1)$$

$$J = u^2 v.$$

对 n 维空间区域 Ω: $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $\cdots$, $x_n\geqslant 0$, $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant R$ 上的 n 重积分,常采用变换

$$T: \begin{cases} x_1 = u_1(1-u_2), \\ x_2 = u_1u_2(1-u_3), \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = u_1u_2\cdots u_{n-1}(1-u_n), \\ x_n = u_1u_2\cdots u_{n-1}u_n. \end{cases}$$

$(0<u_1<R,\ 0<u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n<1)$,我们来证变换 T 的 Jacobi 行列式为

$$J = u_1^{n-1}u_2^{n-2}\cdots u_{n-1}.$$

已知 $n=3$ 时上式成立. 假设 $n-1$ 时上式成立,证 n 时上式成立. 为此把变换 T 拆成下列两个变换的复合:

$$T_1: \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_2(1-y_3), \\ x_3 = y_2y_3(1-y_4), \\ \vdots \\ x_{n-1} = y_2y_3\cdots y_{n-1}(1-y_n), \\ x_n = y_2y_3\cdots y_{n-1}y_n. \end{cases} \qquad T_2: \begin{cases} y_1 = u_1, \\ y_2 = u_1u_2, \\ y_3 = u_3, \\ \vdots \\ y_{n-1} = u_{n-1} \\ y_n = u_n. \end{cases}$$

则

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}$$
$$=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}\Bigg|_{T_2}\cdot\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}$$
$$=(y_2^{n-2}y_3^{n-3}\cdots y_{n-1})\big|_{T_2}\cdot u_1$$
$$=u_1^{n-1}u_2^{n-2}u_3^{n-3}\cdots u_{n-1}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 按 $x_2, x_1, x_3, \cdots, x_n$ 顺序写出例 1 的积分限.

2. 设 $\boldsymbol{A}\in L(\mathbf{R}^n)$ 且可逆,求 $(n-1)$ 维曲面 $\boldsymbol{Ax}\cdot\boldsymbol{Ax}=1$ 所围区域的 n 维体积.

3. 设 $\Omega=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\,|\,0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4\leqslant 1\}$,试按 x_3, x_1, x_2, x_4 顺序把重分

$$I=\iint\limits_{\Omega}\iint f(x_1,x_2,x_3,x_4)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$$

化为累次积分.

4. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\leqslant\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{z}\leqslant 1\right\}$,求积分

$$I\iiint\limits_{\Omega}y\sqrt{1+z^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

5. 设 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 上连续,证明:

$$\int_0^x\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t.$$

取 $f(t)$ 为 $f^{(n)}(t)$ 时,试求出上式左端的累次积分.

6. 设 Ω 是 n 维空间的 $(n+1)$ 面体:

$$\Omega=\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\big|\,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^n x_i\leqslant R\Big\}.$$

试求出 $(n+1)$ 面体 Ω 的体积 V_n.

7. 设 Ω 是 n 维空间中的区域:

$$\Omega=\Big\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\big|\,x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,\ a\leqslant\sum_{i=1}^n x_i\leqslant b\Big\}$$

$(b>a>0)$. 证明

$$\iint\cdots\int_{\Omega} f(x_1+x_2+\cdots+x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=\int_a^b f(y)\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}y.$$

8. 证明：由曲面 $\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x_i^2}{a_i^2}=\frac{x_n^2}{a_n^2}$ $(0\leqslant x_n\leqslant a_n)$所围成的 n 维锥体的体积为

$$V=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}a_1a_2\cdots a_n.$$

§6 反常重积分

前面讨论过的重积分中要求积分域 D 是有界可测区域(或闭区域)，被积函数在 D 上有界. 若积分域是伸展到无穷的无界域，或被积函数在孤立边界点或边界曲线附近无界，这时就要引进反常重积分收敛的概念，我们以二重积分为例加以说明.

定义 18.5 设 D 为一区域，它与任一半径为 R 的圆 $x^2+y^2<R^2$ 的交集均可测. $\{D_n\}$为一有界闭可测集列，满足：

(1) $D_1\subset D_2\subset\cdots\subset D_n\subset\cdots\subset D$;

(2) 对 D 内任一有界闭集 F，存在 m，使

$$F\subset D_m.$$

则称$\{D_n\}$为区域 D 的一个**穷竭列**.

如 D 为区域 $0<x^2+y^2<1$，取 D_n：$\frac{1}{n^2}\leqslant x^2+y^2\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$ $(n=3,4\cdots)$，则 $\{D_n\}_3^{\infty}$ 为 D 的一个穷竭列. 又如 D 为区域 $x^2+y^2>1$，取 D_n：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant n^2$ $(n=2,3\cdots)$，则 $\{D_n\}_2^{\infty}$ 为 D 的一个穷竭列. 事实上，一个区域 D 的穷竭列有无限多种可能取法.

定义 18.6 设 D 为一区域，它与任一半径 R 的圆 x^2+y^2

$<R^2$ 的交集均可测. 函数 $f(x, y)$在 D 上内闭可积(即在 D 内任一有界闭可测集上可积). $\{D_n\}$为 D 的任一穷竭列,若极限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I$$

存在(I 与穷竭列的取法无关),则称反常积分①

$$\iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛,其值为 I,记作

$$I = \iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若上述极限不存在,则称反常积分发散.

若函数$|f(x, y)|$在 D 上的反常积分

$$\iint_{D} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛,则称反常积分 $\iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛.

定理 18.10 反常积分 $\iint_{D} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 绝对收敛的充要条件是:存在一个穷竭列$\{D_n\}$和常数M,使对一切 n,有

$$\iint_{D_n} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M.$$

证明 证必要性. 对平面作间距为 $\frac{1}{2^n}$ 的平行直线网,把包含在 D 与 $x^2+y^2<n^2$ 的交集内闭网格之和集作为 D_n,显然$\{D_n\}$是 D 的一个穷竭列. 由绝对收敛,得

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

存在. 因此存在 M,对一切 n,有

① 也称为广义积分.

$$\iint_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M.$$

证充分性,假设定理条件满足,根据单调递增有界数列有极限,知

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = I.$$

若$\{G_n\}$是 D 的另一穷竭列,设

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{G_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = J,$$

只要证 $I=J$,任意固定 G_n,由$\{D_n\}$的穷竭列性质,存在 m,使

$$G_n \subset D_m.$$

由此推出

$$\iint_{G_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_{D_m} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

进而有

$$\iint_{G_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant I.$$

因上式对任意的 n 成立,令 $n\to+\infty$,得 $J\leqslant I$.

由对称性知

$$I\leqslant J.$$

故 $I=J$. 证毕.

定理 18.11 反常积分

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛的充要条件为绝对收敛.

证明 证充分性. 由反常积分绝对收敛,根据上一定理,存在 D 的穷竭列$\{D_n\}$和常数 M,使

$$\iint_{D_n} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant M.$$

令

$$f_+(x, y)=\frac{1}{2}[|f(x, y)|+f(x, y)],$$

$$f_-(x, y)=\frac{1}{2}[|f(x, y)|-f(x, y)].$$

显然有

$$0\leqslant f_+(x, y)\leqslant|f(x, y)|,$$
$$0\leqslant f_-(x, y)\leqslant|f(x, y)|.$$

因而有

$$\iint\limits_{D_n}f_+(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_{D_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant M.$$

再由定理 18.10,知反常积分 $\iint\limits_{D}f_+(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛.同理反常积分 $\iint\limits_{D}f_-(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛,所以反常积分

$$\iint\limits_{D}f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}[f_+(x, y)-f_-(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛.

证必要性.假设结论不真,总存在穷竭列$\{D_n\}$,满足

$$\iint\limits_{D_{n+1}}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y>3\iint\limits_{D_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2n.$$

记 $\Delta_n=D_{n+1}\setminus D_n$,则有

$$\iint\limits_{\Delta_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y>2\iint\limits_{D_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2n.$$

因$|f(x, y)|=f_+(x, y)+f_-(x, y)$,由上面不等式推出,在$f_+(x, y)$和$f_-(x, y)$中至少有一个(比如$f_+(x, y)$)在$\Delta_n$上积分满足:

$$\iint\limits_{\Delta_n}f_+(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint\limits_{D_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n.$$

存在Δ_n的一个分法,使得上式左边积分的小和仍有

$$\sum_i m_i^{(n)}\Delta\sigma_i^{(n)}>\iint\limits_{D_n}|f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y+n.$$

这里 $\Delta\sigma_i^{(n)}$ 是 Δ_n 的分法元素，$\Delta\sigma_i^{(n)}$ 也表示元素的面积，$m_i^{(n)}$ 是 $f_+(x, y)$ 在 $\Delta\sigma_i^{(n)}$ 上的下确界. 令

$$\Delta_n^+ = \bigcup_i \{\Delta\sigma_i^{(n)} \mid m_i^{(n)} > 0\}.$$

在 Δ_n^+ 上 $f(x, y) = f_+(x, y) > 0$,所以有

$$\iint\limits_{\Delta_n^+} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta_n^+} f_+(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant \sum_i m_i^{(n)} \Delta\sigma_i^{(n)}$$

$$> \iint\limits_{D_n} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + n.$$

此外,显然有

$$\iint\limits_{D_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant -\iint\limits_{D_n} |f(x, y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

再令 $G_n = \overline{\Delta_n^+ \cup D_n}$, $D_n \subset G_n \subset D_{n+1}\ (n=1, 2\cdots)$,那么

$$\iint\limits_{G_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > n.$$

这样我们求出 D 的一个穷竭列 $\{G_n\}$,且

$$\left|\iint\limits_{G_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| > n.$$

此式表明 $f(x, y)$ 在 D 上的反常积分是发散的,它与假设收敛矛盾,这矛盾说明反证法假设不成立,即反常积分绝对收敛. 证毕.

此定理说明,对反常重积分来说,只有绝对收敛概念,没有条件收敛概念. 具体判断反常重积分收敛性时,常用反常积分变换定理和反常积分化累次积分定理.

定理 18.12 设 G, D 为平面区域,它们与以原点为圆心以 R 为半径的圆的交集可测($0 < R < +\infty$),变换

$$T: x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ G \to D$$

为同胚变换,且 $T \in C^{(2)}(G)$,则下式

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_G f[x(u, v), y(u, v)]\,|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

中有一反常积分收敛,另一反常积分也收敛,且等式成立.

证明 设左端反常积分收敛,任取 G 的一穷竭列 $\{G_n\}$,通过变换 $T^{-1}: G_n \to D_n$,得 D 的一个穷竭列 $\{D_n\}$,应用第四节中重积分变换,得

$$\iint_{D_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{G_n} f[x(u, v), y(u, v)] \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

上式令 $n \to +\infty$,得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\iint_{G_n} f[x(u, v), y(u, v)] \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ =& \lim_{n\to+\infty}\iint_{D_n} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =& \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

这表明反常积分 $\iint_G f[x(u, v), y(u, v)] \mid J(u, v) \mid \mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 存在,且等于 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 证毕.

定理 18.13 设 D 为矩形区域: $a<x<b$, $c<y<d$ (a, b, c, d 可以为无限),若累次积分

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b \mid f(x, y) \mid \mathrm{d}x <+\infty$$

$$\left(\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mid f(x, y) \mid \mathrm{d}y <+\infty\right),$$

则反常积分 $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛,且

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x\left(= \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y\right).$$

若累次积分

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b \mid f(x, y) \mid \mathrm{d}x =+\infty$$

$$\left(\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d \mid f(x, y) \mid \mathrm{d}y =+\infty\right),$$

则反常积分 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

由于此定理证明较难,恕不证明.

例如 $D=(0, 1)\times(0, 1)$,函数 $f(x, y)$定义如下:

$$f(x, y)=\begin{cases}2^n, & \text{当 } x=\dfrac{2m-1}{2^n} \text{ 与 } 0<y\leqslant\dfrac{1}{2^n}\\ & (n=1, 2, 3, \cdots;\ m=1, 2, \cdots, 2^{n-1}),\\ 0, & \text{在其他各点.}\end{cases}$$

当 $y\in(0, 1)$固定时,只有有限个 x 的值能使 $f\neq0$,所以

$$\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x=0, \forall\, y\in(0, 1),$$

因而

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x=0.$$

根据定理 18.13 知

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

若固定 $x\in(0, 1)$,当 x 不是 $\dfrac{2m-1}{2^n}$ 时,则 $f=0$,且有 $\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y=0$;当 $x=\dfrac{2m-1}{2^n}$ 时,则 $\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2^n}}2^n\mathrm{d}y=1$. 由此可见,累次反常积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}y$ 不存在.

对函数 $f(x, y)+f(y, x)$,显然,两个累次反常积分都不存在,但反常积分仍为零.

例 1 讨论下列反常积分收敛性,若收敛时求其值:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{0<x^2+y^2<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$;　　(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2>1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$.

解 (1) 作极坐标变换有

$$\iint\limits_{0<x^2+y^2<1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}=\iint\limits_{\substack{0<\theta<2\pi\\0<r<1}}\frac{r\mathrm{d}r}{r^\alpha}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}},$$

所以 $\alpha<2$ 时,反常积分收敛,且

$$\iint\limits_{0<x^2+y^2<1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} = \frac{2\pi}{2-\alpha};$$

当 $\alpha \geqslant 2$ 时,反常积分发散.

(2) 因

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} = \iint\limits_{\substack{0<\theta<2\pi \\ 1<r<+\infty}} \frac{r\mathrm{d}r}{r^\alpha} = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^{\alpha-1}},$$

所以当 $\alpha>2$ 时,反常积分收敛,且

$$\iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha} = \frac{2\pi}{\alpha-2};$$

当 $\alpha \leqslant 2$ 时,反常积分发散.

例 2 设 D 是由曲线 $y=x^2$, $x^2+y^2=1$ 和 $y=0$ 所围成的区域(图 18-28). 证反常积分

$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

收敛.

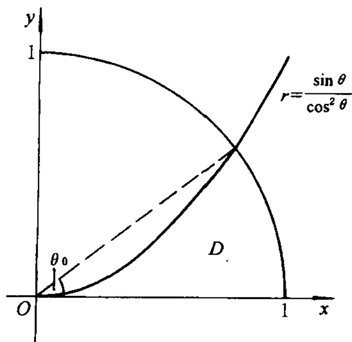


图 18-28

证明 把 D 的边界曲线化为极坐标下的方程:

$$r=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta},\ r=1,\ \theta=0.$$

令 θ_0 是方程 $\cos^2\theta=\sin\theta$ 的解,则

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \iint\limits_{\substack{0<\theta<\theta_0 \\ \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}<r<1}} \frac{rdr}{r^2} = \int_0^{\theta_0} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1 \frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^{\theta_0} \ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta$$

因

$$\ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \sim -\ln\theta \quad (\theta \to 0),$$

所以反常积分 $\int_0^{\theta_0} \ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta$ 收敛,故反常积分

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

收敛.

通过上两例看出,二重反常积分的收敛性不仅与被积函数趋于无穷的速度有关,也与积分域在瑕点处的形状有关.

例 3 讨论反常积分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z)^\alpha}$$

收敛性,其中 D: $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x+y+z<1$.

解 作变换 T: $x=u(1-v)$, $y=uv(1-w)$, $z=uvw$,它把 $0<u<1$, $0<v<1$, $0<w<1$ 一一地映为区域 D,变换 T 的 Jacobi 行列式为 $J=u^2v$,因此可得

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{(x+y+z)^\alpha} = \iiint\limits_{\substack{0<u<1 \\ 0<v<1 \\ 0<w<1}} \frac{u^2 v du dv dw}{u^\alpha}$$

$$= \int_0^1 dw \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{u^2 v du}{u^\alpha}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^{\alpha-2}},$$

所以当 $\alpha<3$ 时,反常积分收敛;当 $\alpha\geqslant3$ 时,反常积分发散.

例 4 讨论反常积分

$$\iint\limits_{\substack{1<x<+\infty\\1<y<+\infty}} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛性.

解 因

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\substack{1<x<+\infty\\1<y<+\infty}} \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{|y^2-x^2|}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\\
&=\int_1^{+\infty}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\Big|_1^x+\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Big|_x^{+\infty}\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_1^{+\infty}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x^2}\right]\mathrm{d}x=+\infty.
\end{aligned}$$

所以反常积分发散.

思考练习 解答下列问题:

1. $x\in\mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}V$ 表示 n 维体积微元,讨论下列反常积分敛散性:

(1) $\displaystyle\int\limits_{0<|\boldsymbol{x}|<1}\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{x}|^\alpha}$; (2) $\displaystyle\int\limits_{|\boldsymbol{x}|>1}\frac{\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{x}|^\alpha}$;

(3) $\displaystyle\int\limits_{|\boldsymbol{x}|<1}\frac{\mathrm{d}V}{(1-|\boldsymbol{x}|)^\alpha}$.

2. 设 D: $x^2+y^2>1$, $0<y<1$,证反常积分

$$\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

在 D 上收敛.

3. 设 $f(x, y)$满足

$$|f(x,y)|\leqslant F(x,y),\ (x,y)\in D.$$

反常积分 $\iint\limits_D F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛,证明:反常积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

收敛.

4. 讨论下列反常积分收敛性,若收敛并求其值:

(1) $$\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^\alpha};$$

(2) $$\iint\limits_{0<x^2+y^2<1} \ln(x^2+y^2)dxdy;$$

(3) $$\iiint\limits_{0<x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha};$$

(4) $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} \frac{dxdydz}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^\alpha}.$$

5. 讨论下列反常积分收敛性:

(1) $$\iint\limits_{\substack{1<x<+\infty \\ 0<y<\frac{1}{x}}} \sin x dxdy;$$

(2) $$\iint\limits_{\substack{0<x<1 \\ 0<y<1}} \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy;$$

(3) $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{xy\sqrt{z}}$,其中 D: $1<x<+\infty$, $1<y<+\infty$, $0<z<\frac{1}{xy}$.

6. 求反常积分

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}} \ (0<h<1).$$

(提示:参见本章 4.3 节思考练习第 5 题)

7. 求下列反常积分:

(1) $$\iint\limits_{x^2+y^2<+\infty} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2};$$

(2) $$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<+\infty} \frac{dxdydz}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}.$$

8. 判别下列反常积分收敛性:

(1) $$\iint\limits_{\substack{0<x<+\infty \\ 0<y<+\infty}} e^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy;$$

(2) $\iint\limits_{\substack{x>0,\ y>0\\ x^2+y^2<1}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-x^2-y^2}$.

9. 计算反常积分

$$\iint\limits_D \ln\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 D 是由直线 $y=0$, $x=\pi$, $y=x$ 所围成.

第十九章 曲线积分与曲面积分

曲线积分和曲面积分可分为两类,一类与曲线和曲面的定向无关,称为第一型曲线积分和曲面积分;一类与曲线和曲面的定向有关,称为第二型曲线积分和曲面积分.

§1 第一型曲线积分

1.1 第一型曲线积分的定义及其存在性

先看一个实际例子.

设有一曲线型物体占有平面内一曲线 L,它的两个端点是 A, B. L 上任一点 (x, y) 处的线密度为 $\rho(x, y)$,函数 $\rho(x, y)$ 在 L 上连续,求此曲线型物体的质量 M.

如果线密度 ρ 为常数,L 之长为 l,则质量 $M=\rho \cdot l$. 现在线密度 $\rho(x, y)$ 不是常数,我们采用"分割——局部近似代替——求和——取极限"的程序来解决. 为此,在曲线 L 上依此取点

$$A = A_0, A_1, A_2, \cdots, A_n = B,$$

把曲线 L 分成 n 段,记为 $\Delta L_1 = \widehat{A_0A_1}$, $\Delta L_2 = \widehat{A_1A_2}$, $\cdots$, $\Delta L_n = \widehat{A_{n-1}A_n}$(图 19-1),每一小段的弧长记为 Δs_1, Δs_2, $\cdots$, Δs_n. 当弧长 Δs_i 很小时,ΔL_i 上各点的线密度近似看成一常量,并等于 ΔL_i 上某点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$ 处的值,于是 ΔL_i 小段的质量 ΔM_i 近似为

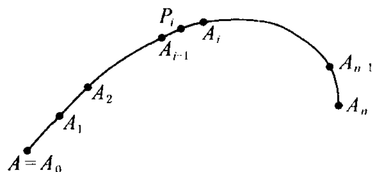


图 19-1

$$\Delta M_i \cong \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因而 M 近似为:

$$M \cong \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

令 $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{\Delta s_i\}$,对上式取极限即得

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

定义 19.1 设 L 是平面可求长曲线, $f(x, y)$ 在 L 上定义,设 L 的两端点为 A, B,依此用分点 $A = A_0$, A_1, $\cdots$, $A_n = B$ 将 L 剖分成 n 小段,记为 ΔL_1, ΔL_2, $\cdots$, ΔL_n, ΔL_i 的弧长记为 $\Delta s_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 在 ΔL_i 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$,当 $\lambda = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{\Delta s_i\} \to 0$ 时. 若和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

的极限存在,且不依赖于 P_i 的取法和曲线 L 的分法,则称这一极限值为 $f(x, y)$ 在曲线 L 上的**第一型曲线积分**,记作

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s \quad 或 \quad \int_{\widehat{AB}} f(x, y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

若 L 为闭曲线时,有时也记作

$$\oint_L f(x, y)\mathrm{d}s.$$

由定义不难看出下列性质:

(1) 设 L 可求长, $f(x, y)$, $g(x, y)$ 在 L 上第一型曲线积分存在, k_1, k_2 为常数,则 $k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)$ 在 L 上第一型曲线积分存在,且

$$\int_L [k_1 f(x, y) + k_2 g(x, y)]\mathrm{d}s$$
$$= k_1 \int_L f(x, y)\mathrm{d}s + k_2 \int_L g(x, y)\mathrm{d}s.$$

(2) L_1, L_2 为可求长曲线,且 L_1 的终点为 L_2 的起点,

$f(x, y)$在$L_i(i=1, 2)$上第一型曲线积分存在. 令$L=L_1\cup L_2$，则$f(x, y)$在L上第一型曲线积分存在,且

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x, y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x, y)\mathrm{d}s.$$

(3) 设$f(x, y)$在可求长曲线$L=\widehat{AB}$上第一型曲线积分存在,则

$$\int_{\widehat{BA}} f(x, y)\mathrm{d}s=\int_{\widehat{AB}} f(x, y)\mathrm{d}s.$$

这是因为定义中出现的是小段的弧长Δs_i,而它与由A到B对L进行分段,还是由B到A对L进行分段无关.

下面来说明当L可求长,函数$f(x, y)$在L上连续时,第一型曲线积分存在. 为此,取弧长s作曲线的参数,记L的参数方程为:

$$x=\varphi(s),\ y=\psi(s)\ (0\leqslant s\leqslant l),$$

定义中P_i点对应的参数设为$\overline{s_i}$,则

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i=\sum_{i=1}^{n} f[\varphi(\overline{s_i}), \psi(\overline{s_i})]\Delta s_i,$$

由于$[0, l]$上连续函数$f[\varphi(s), \psi(s)]$的定积分存在,所以当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}\to 0$时，$f(x, y)$在$L$上的第一型曲线积分存在，且

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s=\int_0^l f[\varphi(s), \psi(s)]\mathrm{d}s. \quad ①$$

1.2 计算公式

称L为一**光滑曲线**,若其参数方程

$$x=x(t),\ y=y(t)\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

满足$x(t), y(t)\in C^{(1)}[a, b]$,且$x'^2(t)+y'^2(t)>0$(端点理解为单侧导数). 光滑曲线一定是可求长曲线. 称L为**逐段光滑曲线**,若曲线L可分成有限段,每段为光滑曲线.

定理 19.1 设L是逐段光滑曲线,函数$f(x, y)$在L上连

续, L 的参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,则

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

证明 由性质(2),只要对光滑曲线证明即成. 设 L 为光滑曲线,已知弧长有公式:

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

所以

$$s'(t) = \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} > 0.$$

这说明 $s=s(t)$ 严格递增,把 $[a, b]$ 映为区间 $[0, l]$,且反函数 $t=t(s)$ 存在,并在 $[0, l]$ 上可微. 令

$$x = x(t(s)) = \varphi(s),\ y = y(t(s)) = \psi(s),\ (0\leqslant s\leqslant l)$$

由 1.1 节①得

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_0^l f[\varphi(s), \psi(s)]\mathrm{d}s.$$

对上式作 $s=s(t)$ 的定积分变换,即得

$$\int_L f(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b f[x(t), y(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

证毕.

注意,计算公式中定积分的下限总是小于上限.

例 1 设 L 为上半圆周 $x^2+y^2=a^2(y\geqslant 0)$,其线密度 $\rho(x, y)=y$,求 L 的重心 $(\bar{x}, \bar{y})$.

解 由对称性知 $\bar{x}=0$, $\bar{y}$ 有公式:

$$\bar{y} = \frac{\int_L y\rho(x, y)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x, y)\mathrm{d}s}.$$

因

$$\int_L \rho(x, y)\mathrm{d}s = \int_L y\mathrm{d}s = \int_0^\pi a\sin t\cdot a\mathrm{d}t = 2a^2,$$

$$\int_L y\rho(x, y)\mathrm{d}s = \int_L y^2\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} a^2\sin^2 t \cdot a\mathrm{d}t$$

$$= 2a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}a^3,$$

所以

$$\bar{y} = \frac{\pi}{4}a.$$

例 2 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,试求

$$I = \int_L x^2\mathrm{d}s.$$

解法一 曲线 L 如图 19-2 所示,先求 L 的参数方程. 为此考虑正交变换

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\\ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z),\\ \zeta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z).\end{cases}$$

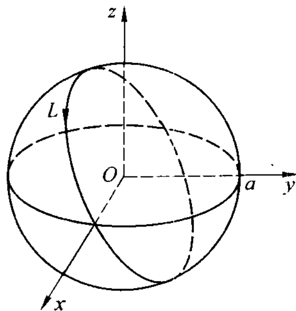


图 19-2

在坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$ 中 L 的参数方程为 $\xi=a\cos t$, $\eta=a\sin t$, $\zeta=0$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$,所以在坐标系 O_{xyz} 中 L 的参数方程为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,\ y = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,$$

$$z = -\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t,\ (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

应用公式得

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t\right)^2 a\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

解法二 由对称性知

$$\int_L x^2\mathrm{d}s=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_L z^2\mathrm{d}s,$$

所以

$$I=\frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s=\frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3.$$

类似于用定积分求曲边梯形的面积,我们用第一型曲线积分来求曲边柱形的面积.

例 3 求柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截下部分的面积.

解 由对称性,只需求柱面在第一象限部分的面积,然后乘 4 即成. 记 L: $x^2+y^2=ax\ (y\geqslant 0)$,所以面积 S 为:

$$\begin{aligned}S&=4\int_L\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}s\\&=4\int_0^a\sqrt{a^2-ax}\,\frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}}\mathrm{d}x\\&=2a\sqrt{a}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=4a^2.\end{aligned}$$

思考练习 解答下列问题:

1. 给定 $\mathbf{R}^n$ 中光滑曲线 $\boldsymbol{x}$: $[a,\ b]\to\mathbf{R}^n$, $t\mapsto x(t)$,证明第一型曲线积分计算公式:

$$\int_L f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}s=\int_a^b f[\boldsymbol{x}(t)]\mid\boldsymbol{x}'(t)\mid\mathrm{d}t.$$

2. 设平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)\ (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出,证明第一型曲线积分计算公式:

$$\int_L f(x,\ y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta]\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta.$$

3. 求下列第一型曲线积分:

(1) $\int_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, L 为圆周 $x^2+y^2=ax$;

(2) $\int_L y^2\mathrm{d}s$, L 为摆线的一拱: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1$

$-\cos t)\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

(3) $\int\limits_L (x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}})\mathrm{d}s$, L 为内摆线: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(4) $\int\limits_L xyz\,\mathrm{d}s$, L 为螺线: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt\quad(0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0<a<b)$.

4. 计算第一型曲线积分:

(1) $\int\limits_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$, L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线;

(2) $\int\limits_L xy\,\mathrm{d}s$, L 同上.

5. 求证第一型曲线积分: $(R>0)$

$$\int\limits_{x^2+y^2=R^2}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-h)^2+y^2}}\mathrm{d}s=\begin{cases}2\pi R\ln\dfrac{1}{R}, & 0<h<R,\\[2mm] 2\pi R\ln\dfrac{1}{h}, & h\geqslant R.\end{cases}$$

6. 设 $f(x,y)$ 在 L 上连续, L 是一闭的逐段光滑简单曲线,证明:

$$u(x,y)=\oint\limits_L f(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\mathrm{d}s,$$

当 $x^2+y^2\to+\infty$ 时趋于零的充要条件是

$$\oint\limits_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s=0.$$

$\left(\text{提示: 考虑 } u(x,y)-\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\oint\limits_L f(\xi,\eta)\mathrm{d}s\right)$

7. 求曲面 $x^2+y^2=1$ 与 $x^2+z^2=1$ 围成立体的表面积.

§2 第二型曲线积分

2.1 第二型曲线积分的定义及其存在性

先看一实例.

设有一平面力场 $\boldsymbol{F}$,

$$\boldsymbol{F}(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}.$$

一单位质量的质点由 A 点沿曲线$\widehat{AB}$运动到 B 点,求力场 F 对质点所作的功.

若力 $\boldsymbol{F}$ 为常力,质点作直线位移 $\boldsymbol{l}$,则 $\boldsymbol{F}$ 对质点所作的功为

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l}.$$

现在力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向都在变化,质点作曲线运动,不能直接应用上述公式,只能运用熟知的程序来处理. 从 A 点开始在$\widehat{AB}$上依此取分点

$$A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \cdots,$$
$$A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n) = B.$$

相应地把$\widehat{AB}$分成 n 段

$$\widehat{A_0A_1}, \widehat{A_1A_2}, \cdots, \widehat{A_{n-1}A_n}. \quad (\text{图 } 19\text{-}1)$$

如果剖分足够精细,每一弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}(i=1, 2, \cdots, n)$近似看成直线段,力 $\boldsymbol{F}$ 在弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$上近似看成常力,且为 $M_i(\xi_i, \eta_i) \in \widehat{A_{i-1}A_i}$点的力,所以质点由 A_{i-1} 到 A_i 力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 ΔW_i 近似为:

$$\Delta W_i \cong \boldsymbol{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y = y_i - y_{i-1}(i=1, 2, \cdots, n)$. 因而

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i \cong \sum_{i=1}^{n} [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i].$$

令 λ 为小段直径中最大者

$$\lambda = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{diam}(\widehat{A_{i-1}A_i}),$$

则

$$W=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i].$$

定义 19.2 设$\widehat{AB}$是一平面连续曲线,函数 $P(x,\ y)$在$\widehat{AB}$上定义. 由 A 至 B 依此用分点

$$A=A_0(x_0,\ y_0),\ A_1(x_1,\ y_1),\ \cdots,$$
$$A_{n-1}(x_{n-1},\ y_{n-1}),\ A_n(x_n,\ y_n)=B$$

将$\widehat{AB}$剖分成 n 小段,记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}(1\leqslant i\leqslant n)$. 令

$$\lambda=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}(\widehat{A_{i-1}A_i}),$$

在每小段$\widehat{A_{i-1}A_i}$上任取一点 $M_i(\xi_i,\ \eta_i)$,当 $\lambda\to 0$ 时,若和式

$$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i\left(\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i\right)$$

极限存在,且不依赖于点 M_i 的取法和$\widehat{AB}$的分法,则称极限值为 $P(x,\ y)$在$\widehat{AB}$上关于 x(关于 y)的**第二型曲线积分**,记作

$$\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i.$$

$$\left(\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta y_i\right)$$

通常总是把函数 $P(x,\ y)$关于 x 的第二型曲线积分和函数 $Q(x,\ y)$关于 y 的第二型曲线积分合在一起讨论,记作

$$\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y=\int_{\widehat{AB}}P(x,\ y)\mathrm{d}x+\int_{\widehat{AB}}Q(x,\ y)\mathrm{d}y.$$

类似于第一型曲线积分性质(1)与(2),同样有关于被积函数的线性性质,和关于积分曲线的可加性质. 至于第一型曲线积分性质(3),说明积分与曲线定向无关,而对于第二型曲线积分正好相反,性质(3)应为

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{\widehat{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

这说明第二型曲线积分与曲线定向有关. 因定义中 Δx_i, Δy_i 应理解为后一分点 A_i 坐标与前一分点 A_{i-1} 坐标之差,若取定曲

线由 B 至 A 的定向时,则后一分点 A_{i-1} 坐标与前一分点 A_i 坐标之差为 $-\Delta x_i$, $-\Delta y_i$ 故相差一负号.

讨论存在性时,先考察 $\widehat{AB}$ 是连续曲线,且由显方程 $y=f(x)\in C[a,b]$ 给出, $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ 为起点和终点,函数 $P(x,y)$ 在 $\widehat{AB}$ 上连续,则

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,f(\xi_i))\Delta x_i.$$

由 $\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}\geqslant \Delta x_i$, 推出 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}(\widehat{A_{i-1}A_i})\to 0$, 必有 $\mu=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$,故得

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i\\&=\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,f(\xi_i))\Delta x_i\\&=\int_a^b P(x,f(x))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这说明 $P(x,y)$ 关于 x 的第二型曲线积分存在,且等于连续函数 $P[x,f(x)]$ 在 $[a,b]$ 的定积分. 但得不出 $P(x,y)$ 关于 y 的第二型曲线积分存在. 如可构造 $y=f(x)$,使 $\int_{\widehat{AB}}\mathrm{d}y=+\infty$.

若 $\widehat{AB}$ 是可求长曲线: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $(a\leqslant t\leqslant b)$ $t=a$ 对应于 A 点, $t=b$ 对应于 B 点. 函数 $P(x,y)$ 在 $\widehat{AB}$ 上连续,这时第二型曲线积分一定存在,且

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b P[x(t),y(t)]\mathrm{d}x(t),$$

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b P[x(t),y(t)]\mathrm{d}y(t).$$

上面右端积分称为 Riemann—Stieltjes[①] 积分,这里我们不对此积分进行讨论.

---

① 斯蒂尔切斯(1856~1894).

2.2 计算公式

证计算公式前,先来证一引理.

设$\widehat{AB}$为连续曲线,其参数方程为:

$$x = x(t),\ y = y(t).\ (a \leqslant t \leqslant b)$$

$t=a$ 对应于起点 A, $t=b$ 对应于终点 B. 认为曲线$\widehat{AB}$是逐段一一的. 即 $[a, b]$ 与$\widehat{AB}$均可分成有限段,对应段之间映射 $x=x(t)$, $y=y(t)$是一一的.

现对 $[a, b]$ 作一分法 Δ:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

相应有$\widehat{AB}$的分法

$$A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \cdots,$$
$$A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n) = B.$$

其中 $x_i=x(t_i)$, $y_i=y(t_i)$, $(i=0, 1, \cdots, n)$. 反之,曲线$\widehat{AB}$有一分法,由于曲线是逐段一一的,相应可得$[a, b]$一个分法 Δ,记

$$\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{diam}(\widehat{A_{i-1}A_i}),\ \mu = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}.$$

引理 19.1 $\lambda\to 0$ 的充要条件为 $\mu\to 0$.

证明 若 $\mu\to 0$,由 $x(t)$, $y(t)$在$[a, b]$上的一致连续性,容易看出 $\lambda\to 0$.

反之,若 $\lambda\to 0$,要证 $\mu\to 0$,假设 $\mu\not\to 0$. 总可找到$\widehat{AB}$的一串分法,相应地有$[a, b]$一串分法$\{\Delta_n\}$,对每个分法 Δ_n,有一区间$[t_{i(n)-1}, t_{i(n)}]$,满足:

$$t_{i(n)} - t_{i(n)-1} \geqslant \delta > 0,$$

而

$$\operatorname{diam}(\widehat{A_{i(n)-1}A_{i(n)}}) \to 0\ (n\to\infty).$$

由有界序列必有收敛子列,无妨设

$$t_{i(n)-1} \to t',\ t_{i(n)} \to t''\ (n\to+\infty).$$

于是有 $t''-t'\geqslant\delta>0$,而

$$\operatorname{diam}(\widehat{A_{t'}A_{t''}}) = \lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\widehat{A_{i(n)-1}A_{i(n)}}) = 0.$$

这表明映射 $x=x(t)$, $y=y(t)$把区间$[t', t'']$映为曲线上一点,它与曲线是逐段一一的相矛盾.故反证法假设不成立,即 $\mu\to 0$. 证毕.

定理 19.2 设$\widehat{AB}$为一逐段光滑曲线,其参数方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$,参数 $t=a$ 对应起点 A,参数$t=b$ 对应终点 B,函数 $P(x, y)$在$\widehat{AB}$上连续,则

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\mathrm{d}x = \int_a^b P[x(t), y(t)]x'(t)\mathrm{d}t,$$

$$\left[\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\mathrm{d}y = \int_a^b P[x(t), y(t)]y'(t)\mathrm{d}t\right].$$

证明 无妨设$\widehat{AB}$光滑.对$\widehat{AB}$依此取分点:

$$A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \cdots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n)=B,$$

相应地得区间$[a, b]$一个分法 Δ:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b.$$

其中 $x_i=x(t_i)$, $y_i=y(t_i)$ $(i=0, 1, 2, \cdots, n)$,又在$\widehat{A_{i-1}A_i}$上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$,令 τ_i 为对应于M_i 的参数值,即

$$\xi_i = x(\tau_i), \eta_i = y(\tau_i), \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]. (i = 1, 2, \cdots, n)$$

则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \zeta_i)\Delta x_i \\
= &\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))[x(t_i)- x(t_{i-1})] \\
= &\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\overline{\tau_i})\Delta t_i(\overline{\tau_i} \in [t_{i-1}, t_i]) \\
= &\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\tau_i)\Delta t_i \\
&+ \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i))[x'(\overline{\tau_i})- x'(\tau_i)]\Delta t_i
\end{aligned}$$

$$= I_1 + I_2.$$

令 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \operatorname{diam}(\widehat{A_{i-1}-A_i})$，$\mu = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$. 由引理和函数 $P(x(t),\ y(t))x'(t)$在$[a,\ b]$上连续，我们有

$$\lim_{\lambda\to 0} I_1 = \lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i),\ y(\tau_i))x(\tau_i)\Delta t_i$$
$$= \int_a^b P(x(t),\ y(t))x'(t)\mathrm{d}t.$$

又因 $P(x(t),\ y(t))$在$[a,\ b]$上有界，$x'(t)$在$[a,\ b]$上一致连续，我们有

$$\lim_{\lambda\to 0} I_2 = \lim_{\mu\to 0} I_2 = 0.$$

这就证明了极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\ \eta_i)\Delta x_i$$

存在，且

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,\ y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x(t),\ y(t))x'(t)\mathrm{d}t.\quad 证毕.$$

若在定理条件下，再假定函数 $Q(x,\ y)$在$\widehat{AB}$上连续，则有

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_a^b [P(x(t),\ y(t))x'(t) + Q(x(t),\ y(t))y'(t)]\mathrm{d}t.$$

注意，公式中与起点对应的参数为下限，与终点对应的参数为上限.

例 1 计算曲线积分

$$I = \int_{\widehat{OA}} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x + 4xy\mathrm{d}y,$$

(1) $\widehat{OA}$为上半圆周：$x^2 + y^2 = ax$ $(y\geqslant 0)$.

(2) $\widehat{OA}$为x轴上线段$\overline{OA}$.

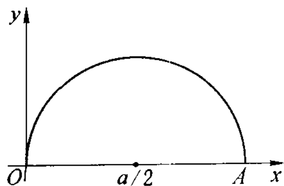


图 19-3

解 (1) $\widehat{OA}$的参数方程为$x = x$，$y = \sqrt{ax - x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant a)$ (图 19-3)，

起点 O 对应于 $x=0$,终点 A 对应于$x=a$. 所以

$$I=\int_0^a[ax+2x(a-2x)]\mathrm{d}x=\int_0^a(3ax-4x^2)\mathrm{d}x=\frac{a^3}{6}.$$

若取$\widehat{OA}$的参数方程为 $x=\frac{a}{2}(1+\cos t)$, $y=\frac{a}{2}\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant\pi)$,起点对应 $t=\pi$,终点对应 $t=0$,所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{\widehat{OA}}ax\mathrm{d}x+4xy\mathrm{d}y\\&=\int_\pi^0\Big[\frac{a^2}{2}(1+\cos t)\Big(-\frac{a}{2}\sin t\Big)\\&\quad+a^2(1+\cos t)\sin t\Big(\frac{a}{2}\cos t\Big)\Big]\mathrm{d}t\\&=\frac{a^3}{4}\int_\pi^0(\sin t-2\sin t\cos^2t)\mathrm{d}t=\frac{a^3}{6}.\end{aligned}$$

(2) 直线段$\overline{OA}$的参数方程为: $x=x$, $y=0$, $(0\leqslant x\leqslant a)$ 所以

$$I=\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\frac{a^3}{3}.$$

此例说明,曲线积分的值不仅与被积数函数有关,还与路径有关.

例 2 计算曲线积分

$$I=\int_L \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y,$$

其中 L 为(1) 折线 OAB; (2) 直线段 $\overline{OB}$. (图 19-4).

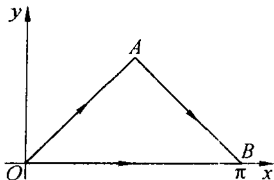


图 19-4

解 (1) 折线 OAB 的方程为:

$$y=\begin{cases}x & \Big(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\Big),\\ \pi-x & \Big(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\Big).\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x\\&\quad+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{e}^x[\cos(\pi-x)+\sin(\pi-x)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$= e^x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + e^x\cos(\pi - x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = e^\pi - 1.$$

(2) $\overline{OB}$的参数方程为$x=x$, $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant \pi)$,所以

$$I = \int_0^\pi e^x\,dx = e^x\Big|_0^\pi = e^\pi - 1.$$

此例说明,有些曲线积分的值只与被积函数和路径起点、终点有关,而与路径取法无关.

2.3 两种类型曲线积分之间的联系

给定光滑曲线$\widehat{AB}$,其参数方程为:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ (a \leqslant t \leqslant b)$$

$t=a$ 对应于A 点, $t=b$ 对应于B 点. 由曲线的方向决定曲线上每点(x, y)处单位切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向. $\boldsymbol{\tau}$ 的方向余弦记为 $\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle$, $\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle$,其中$\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle$ $\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle$分别表示向量 $\boldsymbol{\tau}$ 与坐标向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 的内积,用参数表示有

$$\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{dx}{ds},$$

$$\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \frac{dy}{ds}.$$

所以得到

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\widehat{AB}} [P\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle]\,ds.$$

这就把被积函数为 P, Q 的第二型曲线积分,化为被积函数为 $P\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle$的第一型曲线积分. 上式所以成立,确切地说是因为通过计算公式,得到的是同一个定积分.

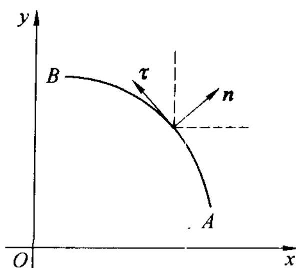


图 19-5

曲线上点(x, y)处的单位法向量记作 $\boldsymbol{n}$,且使 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\tau}$ 成右手系(图19-5). 由图看出

$$\begin{cases}\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}\rangle = \cos\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle, \\ \cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}\rangle = -\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle.\end{cases}$$

所以第二型曲线积分也可化成如下的第一型曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{\widehat{AB}} [Q\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}\rangle - P\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}\rangle]\mathrm{d}s.$$

类似有

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\widehat{AB}} [P\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{x}\rangle + Q\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}\rangle + R\cos\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{z}\rangle]\mathrm{d}s.$$

例 计算曲线积分

$$I = \int_L (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向看 L 取逆时针方向(图 19-2).

解法一 取 L 的参数方程为

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,$$

$$y = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t,$$

$$z = -\frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

所以

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \Big[& \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t\right)\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t\right) \\ & + \left(-\frac{3a}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sin t + \frac{a}{\sqrt{6}}\cos t\right) \\ & + \left(\frac{2a}{\sqrt{2}}\cos t\right)\left(-\frac{2a}{\sqrt{6}}\cos t\right)\Big]\mathrm{d}t \\ = & -\int_0^{2\pi} a^2(\sqrt{3}\sin^2 t + \sqrt{3}\cos^2 t)\mathrm{d}t = -2\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

解法二 为求 L 单位的切向量 $\boldsymbol{\tau}$,先求出平面与球面的法

向量为

$$N_1 = i + j + k,\ N_2 = xi + yj + zk.$$

所以 L 的切向量 T 为:

$$T = N_1 \times N_2 = (z-y)i + (x-z)j + (y-x)k,$$

由图 19-2 可看出 T 的方向与 L 的定向一致,由此得

$$\tau = \frac{(z-y)i + (x-z)j + (y-x)k}{\sqrt{(z-y)^2 + (x-z)^2 + (y-x)^2}}.$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_L [(y-z)\cos\langle \tau, x\rangle + (z-x)\cos\langle \tau, y\rangle \\ &\quad + (x-y)\cos\langle \tau, z\rangle]\mathrm{d}s \\ &= -\int_L \frac{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}{\sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}}\mathrm{d}s \\ &= -\int_L \sqrt{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_L \sqrt{3(x^2+y^2+z^2) - (x+y+z)^2}\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_L \sqrt{3}a\,\mathrm{d}s = -2\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

介绍第三种解法前,注意到若定向曲线 L 位于曲面

$$z = f(x, y)$$

上,记 L 在 Oxy 平面上的定向投影曲线为 L_1,则空间曲线积分可化为平面曲线积分:

$$\begin{aligned} &\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ &= \int_{L_1} P[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x + Q[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{L_1} R[x, y, f(x, y)]\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y\right). \end{aligned}$$

事实上,设 L_1 的参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t),\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$,则 L 的参数方程为 $x=x(t),\ y=y(t),\ z=f[x(t),\ y(t)]\ (\alpha \leqslant t \leqslant$

β). 利用曲线积分计算公式即知上面等式成立.

解法三　因曲线 L 位于平面的 $z=-x-y$ 上,所以

$$I=\int_{L_1}(y+x+y)\mathrm{d}x+(-x-y-x)\mathrm{d}y$$
$$+(x-y)(-\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$$
$$=\int_{L_1}3y\mathrm{d}x-3x\mathrm{d}y=-6\cdot\frac{1}{2}\int_{L_1}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$
$$=-6\times L_1\text{ 所围区域的面积}=-6\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\pi a^2$$
$$=-2\sqrt{3}\pi a^2.$$

思考练习　解答下列问题:

1. L 是定向闭曲线,根据定义说明线积分 $\oint_L P(x)\mathrm{d}x+Q(y)\mathrm{d}y+R(z)\mathrm{d}z=0$.

2. 利用隐函数存在定理和有限覆盖定理,说明 $\widehat{AB}$ 是光滑曲线时,必是逐段一一的.

3. 求下列第二型曲线积分:

(1) $\int_{\widehat{AB}}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AB}$ 为连接 $A(1,1)$, $B(2,4)$ 的直线段;

(2) $\int_{\widehat{AB}}(x-2xy^2)\mathrm{d}x+(y-2x^2y)\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AB}$ 为连接 $A(0,0)$, $B(2,4)$ 的抛物线 $y=x^2$;

(3) $\int_{\widehat{AB}}(x+y)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AB}$ 为连接 $A(0,0)$, $B(2,0)$ 的折线 $y=1-|1-x|$;

(4) $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$, L 为圆周 $x^2+y^2=ax$,取逆时针方向.

4. 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

(1) L: $x^2+y^2=a^2$,取逆时针方向;

(2) L: $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$ 的边界,取逆时针方向.

5. 计算第二型曲线积分

$$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}.$$

积分路径 L 同上题.

6. 设 P, Q 为$\overset{\frown}{AB}$上的连续函数,光滑曲线$\overset{\frown}{AB}$有长度 l,证明:

$$\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}x\right|\leqslant M\cdot l,$$

其中 $M=\max\limits_{(x,y)\in\overset{\frown}{AB}}\sqrt{P^2+Q^2}$.

7. 求下列第二型曲线积分:

(1) $\int_{\overset{\frown}{AB}}(x-y)\mathrm{d}x+(y-z)\mathrm{d}y+(z-x)\mathrm{d}z$, $\overset{\frown}{AB}$为连接 $A(0,0,0)$和 $B(1,1,1)$的曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$;

(2) $\int_{\overset{\frown}{AB}}y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, $\overset{\frown}{AB}$为连接 $A(\alpha,0,0)$和 $B(\alpha,0,2\pi r)$的曲线 $x=\alpha\cos t$, $y=\beta\sin t$, $z=rt$ (α, β, r 为正数).

8. 求第二型曲线积分

$$I=\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z.$$

其中 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 沿逆时针方向.

9. 求第二型曲线积分

$$I=\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z,$$

(1) L 为球面三角形 $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$ 的边界线,从球的外侧看去,L 的方向为逆时针;

(2) L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax$ $(a>0)$ 的交线位于 Oxy 平面上方部分,从 x 轴正向看去,L 的方向为顺时针.

§3 曲 面 面 积

3.1 由显方程表示的曲面

设曲面 S 由方程

$$z=f(x,\ y),\ (x,\ y)\in D$$

给出,D 是有界可测闭区域,$f(x,\ y)\in C^{(1)}(D)$,这时称 S 为光滑曲面,记

$$p(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial x},\ q(x,\ y)=\frac{\partial f}{\partial y},$$

曲面 S 上每点有法向量

$$\boldsymbol{n}=-p\boldsymbol{i}-q\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

因而 S 上每点有切平面存在,我们用局部以切平面近似代替曲面的办法来定义光滑曲面 S 的面积.

为此作 D 的一个分法 $\Delta=\{\Delta\sigma_1,\ \Delta\sigma_2,\ \cdots,\ \Delta\sigma_n\}$,元素 $\Delta\sigma_i$ 的面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 相应地得到曲面 S 的一个分法

$$\{\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \cdots,\ \Delta S_n\},$$

使 ΔS_i 在 xOy 平面上的投影为 $\Delta\sigma_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 在 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i,\ \eta_i,\ f(\xi_i,\ \eta_i))$,过点 M_i 作 S 的切平面,记作 π_i,在这个切平面 π_i 上,取一小块 ΔS_i^*,使它在 Oxy 平面上的投影也为 $\Delta\sigma_i$,对 ΔS_i^* 可以谈面积,其面积仍记为 ΔS_i^* $(1\leqslant i\leqslant n)$. 当分法充分细密时,面积 ΔS_i^* 近似看作 ΔS_i 的面积,和数

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^*$$

近似于 S 的面积,当 $\|\Delta\|\to 0$ 时,若上述和数有一确定的极限,不依赖于点 M_i 的取法和 D 的分法,则称此极限为曲面 S 的面

积.

从这个定义出发,我们来推导曲面面积公式. M_i 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}_i=-p(\xi_i,\ \eta_i)\boldsymbol{i}-q(\xi_i,\ \eta_i)\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

所以

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{z}\rangle=\frac{1}{\sqrt{1+p(\xi_i,\ \eta_i)^2+q(\xi_i,\ \eta_i)^2}}.$$

因平面 π_i 与坐标平面 Oxy 的夹角(即法向量间的夹角)为 $\langle\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{z}\rangle$,所以有

$$\Delta\sigma_i=\cos\langle\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{z}\rangle\Delta S_i^*,$$

或

$$\Delta S_i^*=\sqrt{1+p(\xi_i,\ \eta_i)^2+q(\xi_i,\ \eta_i)^2}\Delta\sigma_i\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

于是得到

$$\begin{aligned}S&=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i^*\\&=\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+p(\xi_i,\ \eta_i)^2+q(\xi_i,\ \eta_i)^2}\Delta\sigma_i.\end{aligned}$$

由连续函数的可积性,上述极限存在,故曲面面积存在,且

$$S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

公式也可写成

$$S=\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{z}\rangle}.$$

若允许 S 的法向量取作

$$\boldsymbol{n}=p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

这时 $\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{z}\rangle$ 为负数,$\Delta\sigma_i=|\cos\langle\boldsymbol{n}_i,\ \boldsymbol{z}\rangle|\Delta S_i^*$,最终公式应改为:

$$S=\iint_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{z}\rangle|}\qquad①$$

例 求曲面 $az=xy$ 包含在圆柱 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分的面

积($a>0$).

解 $z=\frac{1}{a}xy$, D: $x^2+y^2\leqslant a^2$. 因

$$p(x,y)=\frac{y}{a},\ q(x,y)=\frac{x}{a},$$

所以

$$\begin{aligned}S&=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a}\iint_D\sqrt{a^2+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{a^2+r^2}r\mathrm{d}r\\&=\frac{2}{3}\pi a^2(2\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

3.2 由参数方程表示的曲面

设曲面 S 由参数方程

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in D \qquad ①$$

给出, D 为有界可测闭区域,函数在 D 上属于 $C^{(1)}$,在 D° 上单叶,且 Jacobi 矩阵

$$\begin{bmatrix}x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{bmatrix}$$

在 D° 上每点的秩为 2,则称 S 为光滑曲面. 记

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}. \qquad ②$$

由于每点秩为 2,行列式 A, B, C 中每点至少有一不为零,故 S 在每点有法向量

$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

且法向量在 S 上连续地变化.

定理 19.3 设 S 是由参数方程①表示的光滑曲面,则其面积 S 存在,且

$$S=\iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad ③$$

其中 A, B, C 由②式给定.

证明 在 D 内部作一闭区域

$$D_\varepsilon=\{P\in D: \operatorname{dist}(P,\partial D)\geqslant\varepsilon\}$$

(图 19-6),与 D_ε 对应的曲面记为 S_ε,先证

$$S_\varepsilon=\iint_{D_\varepsilon} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad ④$$

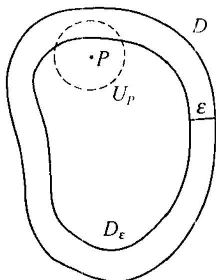


图 19-6

任取一点 $P(u,v)\in D_\varepsilon$,因 A, B, C 中至少有一不为零,不妨设

$$C=\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_P\neq 0,$$

根据反函数存在定理,存在 P 点邻域 $U_p\subset D^\circ$和 xy 平面上邻域 V,变换

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}: U_P\to V$$

同胚,反函数

$$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}: V\to U_P$$

在 V 上属于 $C^{(1)}$ 类. 记 S 上与 U_P 对应的部分记作 S_P,则曲面 S_P 可用显方程表示:

$$z=z[u(x,y),v(x,y)]=f(x,y),\ (x,y)\in V.$$

由本章 3.1 节①得

$$S_P=\iint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{z}\rangle|}.$$

对上式作二重积分变换,得

$$S_P=\iint_{U_P}\frac{|C|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{|\cos\langle \boldsymbol{n},\boldsymbol{z}\rangle|}=\iint_{U_P}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad ⑤$$

如果在 U_P 上 A 或 $B\neq 0$,我们同样可得上式.

现在考虑闭集 D_ε 的一个开覆盖

$$\{U_P: P \in D_\varepsilon\},$$

由有限覆盖定理,存在有限个 U_P 盖住 D_ε,把这有限个记作 $\{U_1, U_2, \cdots, U_n\}$,去掉重叠部分,把 D_ε 分割成有限个邻域之和

$$D_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^*,$$

其中 $U_1^* = U_1 \cap D_\varepsilon$, $U_2^* = (U_2 \backslash U_1) \cap D_\varepsilon$, $\cdots$, $U_n^* = [U_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i] \cap D_\varepsilon$. 记 S 上与 U_i^* 对应部分为 S_i^*,因 $U_i^* \subset U_i$ 与⑤得

$$S_i^* = \iint_{U_i^*} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (i=1, 2, \cdots, n).$$

所以有

$$S_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} S_i^* = \sum_{i=1}^{n} \iint_{U_i^*} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{D_\varepsilon} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

最后令 $\varepsilon \to 0$,即得

$$S = \iint_{D} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \qquad \text{证毕.}$$

利用向量运算,可得面积的另一表示式.

令

$$\boldsymbol{r}_u = x_u\boldsymbol{i} + y_u\boldsymbol{j} + z_u\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r}_v = x_v\boldsymbol{i} + y_v\boldsymbol{j} + z_v\boldsymbol{k}.$$

则

$$A^2+B^2+C^2 = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|^2 = |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 (\sin\langle \boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v\rangle)^2$$

$$= |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 (1-\cos^2\langle \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v\rangle)$$

$$= |\boldsymbol{r}_u|^2 |\boldsymbol{r}_v|^2 - (\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v)^2.$$

记

$$\begin{cases} E = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ G = \boldsymbol{r}_v \cdot \boldsymbol{r}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \\ F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v. \end{cases}$$

则

$$A^2+B^2+C^2=EG-F^2,$$

故得

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{⑥}$$

例 1 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面积.

解 球面的参数方程为

$$x=R\cos\theta\sin\varphi,\ y=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\cos\varphi,$$
$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

因

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\sin\varphi,\ 0),$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi=(R\cos\theta\cos\varphi,\ R\sin\theta\cos\varphi,\ -R\sin\varphi),$$

所以

$$E=R^2\sin^2\varphi,\ F=0,\ G=R^2.$$

应用公式⑥得

$$S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=\iint\limits_D R^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$=R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=4\pi R^2.$$

例 2 求椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的面积.

解 椭球面的参数方程为

$$x=a\cos\theta\sin\varphi,\ y=b\sin\theta\sin\varphi,\ z=c\cos\varphi,$$
$$D=\{(\theta,\varphi):0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

因

$$\boldsymbol{r}_\theta=(-a\sin\theta\sin\varphi,\ b\cos\theta\sin\varphi,\ 0),$$
$$\boldsymbol{r}_\varphi=(a\cos\theta\cos\varphi,\ b\sin\theta\cos\varphi,\ -c\sin\varphi).$$

所以

$$A=-bc\cos\theta\sin^2\varphi,\ B=-ac\sin\theta\sin^2\varphi,\ C=-ab\cos\varphi\sin\varphi,$$

应用公式⑥得

$$S = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)c^2\sin^2\varphi + a^2b^2\cos^2\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

当 a, b, c 两两不等时,这个积分积不出来(即无初等原函数).当 $a=b$ 时可求出面积 S

$$S = 2\pi a\begin{cases}\left[a + \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right], & a > c,\\ \left[a + \dfrac{c^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}\right], & a < c.\end{cases}$$

3.3 连续曲面的面积

为了说明应如何给连续曲面定义面积,先来看一著名的 Schwarz 例子.

给定一个半径为 1 高为 1 的直圆柱面 S. 我们用下述方法构造一内接于此柱面的多面形. 将柱面的高分为 m 等分,过每一分点作平行于底面的平面,于是在柱面上得到 $m+1$ 个圆周(包括上、下两底的圆周在内). 将每一圆周分成 n 等分,使上一圆周的分点位于其下一圆周的弧的中点上方. 由所有这些弧的弦以及连接弦的端点到其上一圆周和下一圆周上相邻分点的线段作成一些三角形,这些三角形总数是 $2mn$ 个,并且都是全等三角形. 这些三角形总和构成直圆柱面 S 的内接多面形 $\sum_{mn}$(图 19-7).

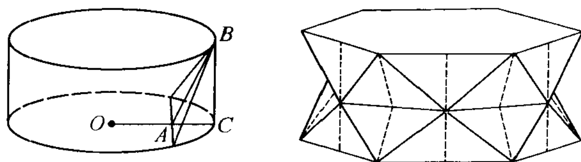


图 19-7

现来求多面形 $\sum_{mn}$ 的面积. 因三角形的底为弦长 $2\sin\dfrac{\pi}{n}$,高为

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CB}^2}=\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{1}{m^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

故多面形 $\sum_{mn}$ 的面积为

$$\sum_{mn}=2mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{m^2}+4\sin^4\frac{\pi}{2n}}$$

$$=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{1+4m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}.$$

如果取 $m=n\to+\infty$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{mn}=2\pi$, 即得曲面 S 的面积;如果取 $m=n^2$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{mn}=2\pi\sqrt{1+\frac{\pi^4}{4}}$; 如果取 $m=n^3$,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{mn}=+\infty$, 这是因为当 $m=n^3$ 很大时,内接多面形的每一三角形几乎处于水平位置,跟圆柱面的切平面几乎垂直,所以 $\sum_{mn}$ 的面积可以无限增大.

但从上面讨论看出

$$\sum_{mn}\geqslant 2n\sin\frac{\pi}{n},$$

得 m, $n\to+\infty$时的下极限为 2π:

$$\varliminf_{\substack{n\to+\infty\\ m\to+\infty}}\sum_{mn}=2\pi.$$

这样我们可以引出连续曲面 S 面积的定义:设 S 为一连续曲面, $S_\triangle$ 表示一个由三角形构成的内接于 S 的多面形,令 $d_P=\operatorname{dist}\{P,S_\triangle\}$, $d=\max\limits_{P\in S}d_P$,则称

$$\varliminf_{d\to 0}S_\triangle$$

为 S 的面积,如果下极限为$+\infty$,则称 S 的面积不存在.

如果限制多面形 $S_\triangle$ 中每个三角形的内角大于 $\alpha(\alpha>0)$,则连续曲面 S 的面积也可用上极限来定义

$$S=\varlimsup_{d\to 0}S_\triangle.$$

思考练习 解答下列问题：

1. 设 D 为有界可测闭域，$f\in C(D)$，$f\in C^{(1)}(D^{\circ})$，若 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上反常积分收敛，则仍可定义曲面面积为

$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

考察例子，D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$f(x,y)=\sqrt{x}$.

若 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上反常积分发散，则曲面面积不存在. 考察例子，D：$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$，$f(x,y)=x\sin\frac{\pi}{2x}$.

2. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 截下部分的面积.

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱体 $z^2+y^2\leqslant 1$ $(a>1)$ 内那部分的面积.

4. 求曲面 $z=\sqrt{2xy}$ 被平面 $x+y=1$，$x=1$，$y=1$ 所截下的那部分的面积.

5. 求曲面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$，$\sqrt{2}x+z=2a$ $(a>0)$ 所围成立体的表面积.

6. 求曲面 $x^2+y^2=1$，$x^2+z^2=1$，$y^2+z^2=1$ 所围成立体的表面积.

7. 求环面 $x=(b+a\cos\varphi)\cos\theta$，$y=(b+a\cos\varphi)\sin\theta$，$z=a\sin\varphi$ $(0<a<b)$ 的面积 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

8. 求螺旋面 $x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=h\varphi$ $(0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$ 的面积.

9. 设曲面 S 由隐函数 $F(x,y,z)=0$ 表示，S 可一一地投影到 xOy 平面上区域 D，F 属于 $C^{(1)}$ 类，证明：

$$S=\iint\limits_{D}\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

§4 第一型曲面积分

4.1 第一型曲面积分的定义及其计算

求已知面密度的曲面形物体的质量时,须要引进第一型曲面积分的概念.

定义 19.3 设 S 是可求面积的连续曲面, $f(x, y, z)$在 S 上定义. $\Delta=\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$是 S 的一个分法(记号 ΔS_i 也表示集合的面积),在每一个 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,令

$$\|\Delta\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\mathrm{diam}(\Delta S_i)\},$$

若下述极限存在:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = I,$$

且不依赖于点 M_i 的取法和 S 的分法,则称 I 是 $f(x, y, z)$在 S 上的**第一型曲面积分**,记作

$$I=\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S.$$

也称 $f(x, y, z)$在 S 上可积.

特别地,当 $f(x, y, z)\equiv 1$, $\iint_S \mathrm{d}S$ 就是曲面 S 的面积. 若 $f(x, y, z)$为 S 的面密度,则 $\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S$ 就是 S 的质量.

如果函数 $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$在可求面积的曲面 S 上可积,则有性质:

(1) $\iint_S (k_1 f+k_2 g)\mathrm{d}S=k_1\iint_S f\mathrm{d}S+k_2\iint_S g\mathrm{d}S$,其中 k_1, k_2 为常数;

(2) 若 S 可表示成两个可求面积曲面之和集,即 $S=S_1\cup S_2$,则

$$\iint_S f\mathrm{d}S=\iint_{S_1} f\mathrm{d}S+\iint_{S_2} f\mathrm{d}S.$$

定理 19.4 设 S 是光滑曲面,其参数方程为

$$x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in D. \quad ①$$

又设 $f(x,y,z)$ 在 S 上连续,则积分 $\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 存在,且

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 A, B, C 见本章 3.2 节②式.

证明 先设①是 D 到 S 的单叶映射. 任取 S 的一个分法 $\Delta_1=\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$,相应有 D 的一个分法 $\Delta_2=\{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}$,由定理 19.3 得

$$\Delta S_i=\iint_{\Delta\sigma_i}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\Big|_{(\overline{u_i},\overline{v_i})}\Delta\sigma_i,$$

其中 $(\overline{u_i},\overline{v_i})\in\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$.

再在每个 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$,相应地有 $\Delta\sigma_i$ 上一点 (u_i,v_i),满足:

$$\xi_i=x(u_i,v_i),\ \eta_i=y(u_i,v_i),\ \zeta_i=z(u_i,v_i)\ (1\leqslant i\leqslant n).$$

作和式

$$I=\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

记 $F(u,v)=f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$,则

$$I=\sum_{i=1}^n F(u_i,v_i)\left[\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right]_{(\overline{u_i},\overline{v_i})}\Delta\sigma_i.$$

由映射①在 D 上一致连续,所以 $\|\Delta_2\|\to 0$ 时,必有 $\|\Delta_1\|\to 0$;反之,因映射①在 D 上连续,单叶. D 和 S 是有界闭集,故逆映射在 S 上连续,单叶. 再由逆映射在 S 上一致连续,所以当 $\|\Delta_1\|\to 0$ 时,必有 $\|\Delta_2\|\to 0$.

记 J 为连续函数 $F(u,v)\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 在 D 上的 Riemann 和

$$J=\sum_{i=1}^{n}F(u_i,\ v_i)\left[\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right]_{(u_i,\ v_i)}\Delta\sigma_i.$$

因$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$在 D 上一致连续,故$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当$\|\Delta_2\|<\delta$时,就有

$$\left|\left[\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right]_{(u_i,\ v_i)}-\left[\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right]_{(\overline{u_i},\ \overline{v_i})}\right|<\varepsilon\quad(1\leqslant i\leqslant n).$$

于是有

$$|I-J|\leqslant\varepsilon\cdot\max_{(u,\ v)\in D}|F(u,\ v)|\cdot mD,$$

其中 mD 表示 D 的面积,上式表明

$$\lim_{\|\Delta_2\|\to0}(I-J)=0,$$

或

$$\lim_{\|\Delta_2\|\to0}I=\lim_{\|\Delta_2\|\to0}J$$

所以有

$$\lim_{\|\Delta_1\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i=\lim_{\|\Delta_2\|\to0}I=\lim_{\|\Delta_2\|\to0}J$$
$$=\iint_D F(u,\ v)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这说明曲面积分存在,且

$$\iint_S f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S=\iint_D F(u,\ v)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

若映射①在 D 上不单叶,如同定理 19.3 的证明,先在 D 内取闭区域 D_ε,相应地有曲面 S_ε,在 D_ε 上应用上述结果,得

$$\iint_{S_\varepsilon} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S=\iint_{D_\varepsilon} F(u,\ v)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

令 $\varepsilon\to0$,上式右端极限存在,故左端极限也存在,取极限即得所求式. 证毕.

若 S 由显函数

$$z=z(x,\ y),\ (x,\ y)\in D$$

给出,我们有公式

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4.2 例与应用

例 1 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_S z^2\mathrm{d}S,$$

其中 S: $x^2+y^2+z^2=a^2$.

解法一 由对称性,容易看出

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}S = \iint\limits_S y^2\mathrm{d}S = \iint\limits_S z^2\mathrm{d}S,$$

所以

$$I = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \frac{a^2}{3}\iint\limits_S \mathrm{d}S = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

解法二 S 的参数式为

$$x = a\cos\theta\sin\varphi,\ y = a\sin\theta\sin\varphi,\ z = a\cos\varphi,$$
$$D = \{(\theta, \varphi): 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\}.$$

因

$$E = a^2\sin^2\varphi,\ F = 0,\ G = a^2,$$

所以

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = a^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,$$
$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} a^2\cos^2\varphi\cdot a^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{4}{3}\pi a^4.$$

例 2 计算曲面积分

$$I = \iint\limits_S \frac{1}{z}\mathrm{d}S,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h$ $(0<h<a)$所截的顶部.

解 S 可表示为:

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ D:\ x^2+y^2\leqslant a^2-h^2,$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是有

$$I=\iint\limits_S\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint\limits_D\frac{a}{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{a}{a^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例 3 设 $h=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}>0$, $f(x)$在$[-h,\ h]$上连续,证明

$$\iint\limits_S f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^1 f(hu)\mathrm{d}u.$$

其中 S: $x^2+y^2+z^2=1$.

证明 取新坐标系 $O_{\xi\eta\zeta}$,使 $\zeta\eta$ 平面即为平面 $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, ζ 轴垂直于此平面,设两坐标系间的正交变换为

$$\begin{cases}\xi=a_1x+b_1y+c_1z\\ \eta=a_2x+b_2y+c_2z\\ \zeta=\dfrac{1}{h}(\alpha x+\beta y+\gamma z).\end{cases}$$

对 S 作分法 $\Delta=\{\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \cdots,\ \Delta S_n\}$,在 ΔS_i 上任取一点 $M_i\{x_i,\ y_i,\ z_i\}$,作 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)\Delta S_i.$$

对 Riemann 和作正交变换,注意到变换保持面积不变,所以

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)\Delta S_i=\sum_{i=1}^n f(h\zeta_i)\Delta S_i$$

$(h\zeta_i=\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)$,令 $\|\Delta\|\to0$,由上式得

$$\iint\limits_S f(\alpha x+\beta y+\gamma z)\mathrm{d}S=\iint\limits_S f(h\zeta)\mathrm{d}S.$$

余下求上式右端积分.因

$$\xi = \cos\theta\sin\varphi,\ \eta = \sin\theta\sin\varphi,\ \zeta = \cos\varphi,$$
$$(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$
$$dS = \sin\varphi d\theta d\varphi,$$

所以

$$\iint_S f(\alpha x + \beta y + \gamma z) dS = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} f(h\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi} f(h\cos\varphi) d(-\cos\varphi)$$
$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(hu) du.$$

下面我们讨论一个物理应用.以面密度 $\rho(x, y, z)$ 分布在曲面 S 的质量,它在 $A(\xi, \eta, \zeta) \in S$ 点的单层位势为

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint_S \frac{\rho(x, y, z)}{r} dS,$$

其中 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$.

质量曲面 S 对 A 点单位质量的作用力为:

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$

(F_x, F_y, F_z 表示力的分量,不是偏导数记号),则有关系式

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial \xi},\ F_y = \frac{\partial W}{\partial \eta},\ F_z = \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

例 4 求半径为 R,面密度为 ρ 的均匀球层对任意一点 A 的位势.

解 取球心为坐标原点,z 轴过 A 点,设 A 点的坐标为(0, 0, a) ($0<a<R$ 或 $a>R$),所以 A 点的单层位势为

$$W(0, 0, a) = \iint_S \frac{\rho dS}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}}.$$

S 的参数方程为

$$x = R\cos\theta\sin\varphi,\ y = R\sin\theta\sin\varphi,\ z = R\cos\varphi,$$
$$D = \{(\theta, \varphi): 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\},\ dS = R^2\sin\varphi d\theta d\varphi,$$

所以

$$W(0,\ 0,\ a)=\rho R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}}$$

$$=2\pi\rho R^2\left[\frac{1}{2aR}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(R^2-2Ra\cos\varphi+a^2)}{\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}}\right]$$

$$=\frac{2\pi\rho R}{a}\sqrt{R^2-2Ra\cos\varphi+a^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2\pi R}{a}\rho[R+a-|R-a|]$$

$$=\begin{cases}4\pi R\cdot\rho, & 0<a<R,\\ \dfrac{4\pi R^2}{a}\rho, & a\geqslant R.\end{cases}$$

结果表明：在均匀球层里面，它的位势为一常数；在球层外面，相当于把球层的全部质量集中于球心时所产生的位势一样.

求球层对 $A(0,\ 0,\ a)$ 点的引力. 由对称性知 $F_x=F_y=0$,

$$F_z=\frac{\partial W(0,\ 0,\ \zeta)}{\partial\zeta}\Big|_{\zeta=a}=\begin{cases}0, & 0<a<R,\\ -\dfrac{4\pi R^2\rho}{a^2}, & a>R.\end{cases}$$

结果表明：在球层里面的单位质量，都不受到球层的任何引力；在球层外面的单位质量，相当于把球层的质量集中到球心时所受到的引力一样.

利用均匀球层的位势，我们来求均匀的球体的位势. 设体密度为 1 的均匀球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，求它在 $(0,\ 0,\ h)$ 点的单层位势 $W(0,\ 0,\ h)$. 已知质量为 M，半径为 R 的均匀球层在 $(0,\ 0,\ a)$ 点的位势 $\widetilde{W}(0,\ 0,\ a)$：

$$\widetilde{W}(0,\ 0,\ a)=\begin{cases}\dfrac{M}{R}, & 0<a<R,\\ \dfrac{M}{a}, & a\geqslant R.\end{cases}$$

所以，当 $h>1$ 时.

$$W(0,\ 0,\ h)=\int_0^1\frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{h}=\frac{4\pi}{3h};$$

当 $0<h\leqslant 1$ 时，

$$W(0,\ 0,\ h)=\int_0^h \frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{h}+\int_h^1 \frac{4\pi r^2\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\frac{4}{3}\pi h^2+2\pi(1-h^2)=2\pi\left(1-\frac{h^2}{3}\right).$$

思考练习 解答下列问题：

1. 设 S 是包含原点的光滑闭曲面，且与任一自原点出发的射线只交于一点. 对 $\forall(x,\ y,\ z)\in S$ 作 S 的切平面 π，原点到平面 π 的距离记作 $d(x,\ y,\ z)$，曲面 S 所围立体体积记作 V. 根据定义说明

$$\frac{1}{3}\iint_S d(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S=V.$$

2. 若 S 非闭曲面，自原点至边界 ∂S 上每点作连线形成一锥，其体积仍记作 V. 说明上述公式仍成立.

3. 求下列第一型曲面积分：

(1) $\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S$，$S$：$x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geqslant 0$；

(2) $\iint_S(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，$S$ 为立体 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 2$ 的边界面；

(3) $\iint_S|xyz|\mathrm{d}S$，S 为曲面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 割下的部分；

(4) $\iint_S z^2\mathrm{d}S$，S 为螺旋面 $x=u\cos v$，$y=u\sin v$，$z=v$ $(0\leqslant u\leqslant a,\ 0\leqslant v\leqslant 2\pi)$.

4. 试求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的质量，如果它在各点处的面密度等于

(1) 这点到 z 轴的距离；

(2) 这点到 z 轴距离的平方.

5. 设 S 是柱面 $x^2+y^2=R^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=h$ 之间的部分，它的面密度为常数 ρ.

(1) 求原点的位势 W；

$$W(0,\ 0,\ 0)=\iint\limits_S \frac{\rho \mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

(2) 求原点处单位质量的引力.

§5 曲面的侧

在讲第二型曲面积分之前,先要介绍曲面侧的概念.

在日常生活中我们见到的曲面总可分出它的两侧,例如,一张纸可以谈它的上侧和下侧,因此可区分出两页;一个纸盒可以谈它的内侧和外侧;一个皮球可以分出里侧和外侧等等.如果在曲面的一侧涂上一种颜色,而在另一侧涂上另一种颜色,这两种颜色不会相碰.

但是,曲面并不是总能分出两侧的,有名的牟比乌斯带是一个单侧曲面的例子.将长方形纸条 $ABCD$,先扭转 $180°$,然后 A 与 C, B 与 D 粘合起来所形成的环带就是 Möbius(牟比乌斯)带(图 19-8).此带不可能分出两侧,如果用颜色涂这一环带,可以不越过边缘而涂遍整条带子.

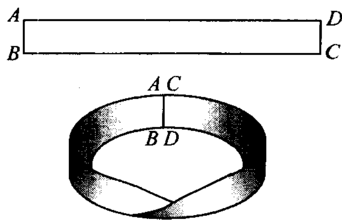


图 19-8

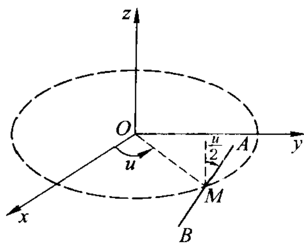


图 19-9

Möbius 带是一内部光滑曲面,它可以看成直线段$\overline{AB}$(设$\overline{AB}=2$)作如下运动的轨迹.让$\overline{AB}$的中点M在Oxy平面上以半径$\overline{OM}=2$作等速转动,同时$\overline{AB}$在MOz平面上以一半的速度绕点M转动.于是我们可以写出它的参数方程(图 19-9):

$$\begin{cases} x = 2\cos u + v\sin\dfrac{u}{2}\cos u, \\ y = 2\sin u + v\sin\dfrac{u}{2}\sin u, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant u \leqslant 2\pi, \\ -1 \leqslant v \leqslant 1 \end{pmatrix} \\ z = v\cos\dfrac{u}{2}. \end{cases} \quad ①$$

我们来考察一下 Möbius 带的特性. 我们在$\overline{AB}$线段的中点 M 处选定 Möbius 带 S 的一个法向量朝向,当 M 作圆周运动时,让法向量连续地变动. 当 M 运行一圈回到原来位置时,法向量的朝向已与出发时的朝向相反. 而对双侧曲面,就找不出像 Möbius 带那样的点 M 和过 M 点的闭路 Γ. 由此可得出双侧曲面的定义.

定义 19.4 设 S 是一内部光滑的曲面,如果对于 S 上的任一点 M_0,取定 M_0 点法向量的一个朝向,让动点 M 从 M_0 出发沿 S 上任何一条闭路 Γ(若 S 非闭曲面,要求 Γ 不越过 S 的边缘)运动再回到 M_0,同时让 M 点的法向量连续地变化,若 M 回到 M_0 时法向量的朝向与出发时的朝向相同,则称曲面 S 是**双侧**的,否则称为**单侧**.

对于双侧曲面 S,只要指定一点 M_0 处法向量的方向,曲面上任意一点 M_1 的法向量方向也随之而定. 事实上,动点 M 从 M_0 出发不管沿哪一条曲线运行到 M_1,所得到的法向量方向都应相同,即为 M_1 点的法向量方向. 因为若不然,就可找出从 M_1 出发的 S 上的一条闭路,使出发时的法向量方向与返回 M_1 时的法向量方向正好相反,这与双侧曲面的定义矛盾.

定义 19.5 设 S 是双侧曲面,如果指定 S 法向量的一个方向,则称曲面 S 的点集连同指定的法向量为曲面的一个**定侧**.

如光滑曲面 S 由显方程

$$z = f(x, y),\ (x, y) \in D$$

给出,它的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\right).$$

若指定 S 为上侧,则上式括号前取"+"号;若指定 S 为下侧,则上式括号前取"-"号.

又如双侧曲面 S 由参数方程

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in D$$

给出,令

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},\ B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)},\ C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)},$$

则 S 的法向量为

$$\boldsymbol{n} = \pm(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}).$$

怎么根据 S 指定的侧来决定上式"±"号选取呢? 事实上只要考察 S 上一点,如果该点指定的法向量向上,则该点 C 值大于零时取"+"号,该点 C 值小于零时取"-"号;如果该点指定的法向量向下,则该点 C 值大于零时取"-"号,该点 C 值小于零时取"+"号.

我们还会遇到分块光滑曲面,如长方体的边界面是分块光滑曲面. 简单地说,有限块光滑曲面通过边界拼接而成的曲面称为**分块光滑曲面**,但要求任意三块曲面不能共有一段边界,最多只能共有一个边界点,如图 19-10 所表示的曲面不是分块光滑曲面. 若每一块都是双侧曲面,拼接而成的分块光滑曲面不一定是双侧的. 如 Möbius 带可以看成是由两块双侧曲面拼接而成. 为了给出分块光滑曲面是双侧的,需要引进曲面的定向.

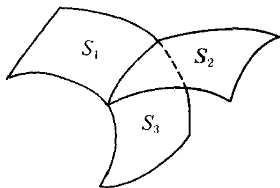


图 19-10

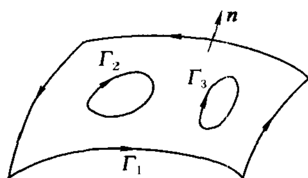


图 19-11

定义 19.6 设 S 是双侧曲面,确定侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$, S 的

边界是由有限条分段光滑闭曲线 Γ_1, Γ_2, …, Γ_m 组成(图 19-11). 一人依 $\boldsymbol{n}$ 的方向站在 S 的边界 $\Gamma_i(i=1, 2, \cdots, m)$上行进,如果曲面 S 位于其左手边;规定人行进的方向为 Γ_i 的正方向($i=1, 2, \cdots, m$). 我们称取定侧的曲面 S 连同按上述规则指定的 Γ_i 的正向($i=1, 2, \cdots, m$)为 S 的一个**定向**.

由 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 来决定边界 Γ_i 的正向,也可用如下办法. 设 $M_0\in\Gamma_i$ 在 M_0 点作右手标架$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3]$,使 $\boldsymbol{e}_1$ 与曲面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 一致, $\boldsymbol{e}_2$ 为 Γ_i 的外法线方向,则 $\boldsymbol{e}_3$ 所指方向即为 Γ_i 的正向.

定义 19.7 设 S 是由 $S_i(i=1, 2, \cdots, k)$构成的分块光滑曲面,对每个 $S_i(1\leqslant i\leqslant k)$都有两个定向可供选择,如果存在一种选择方法,使任意两个有公共边界的光滑曲面,它们在公共部分边界的方向正好相反,则称此分块光滑曲面 S 是双侧的,否则是单侧的.

例如四面体、六面体(图 19-12)、多面体,它们的边界面都是分块光滑曲面,而且都是双侧曲面,能够确定其内侧和外侧.

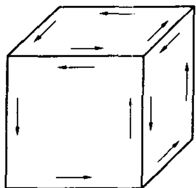


图 19-12

须要指出的是, Möbius 带 S 是指参数方程给出的值域. 考察 S 的边界∂S 时,因 S 是线段$\overline{AB}$运行一圈的轨迹,所以边界∂S 是端点 B, A 运行的轨迹并集. B 点从$(2, 0, -1)$出发沿曲线

$$\begin{cases} x=\left(2-\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u, \\ y=\left(2-\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u, \quad (0\leqslant u\leqslant 2\pi) \\ z=-\cos\dfrac{u}{2}, \end{cases}$$

逆时针绕行至$(2, 0, 1)$点,即出发时的 A 点. 又 A 点沿曲线

$$\begin{cases} x = \left(2 + \sin \dfrac{u}{2}\right)\cos u, \\ y = \left(2 + \sin \dfrac{u}{2}\right)\sin u, \quad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi) \\ z = \cos \dfrac{u}{2}, \end{cases}$$

逆时针绕行至(2, 0, −1)点,即出发时的 B 点. 将上一参数方程作 $u=t-2\pi$ $(2\pi\leqslant t\leqslant 4\pi)$变换,得

$$\begin{cases} x = \left(2 - \sin \dfrac{t}{2}\right)\cos t, \\ y = \left(2 - \sin \dfrac{t}{2}\right)\sin t, \quad (2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi) \\ z = -\cos \dfrac{t}{2}, \end{cases}$$

把这两轨迹合起来,即得边界∂S 的参数方程:

$$\begin{cases} x = \left(2 - \sin \dfrac{t}{2}\right)\cos t, \\ y = \left(2 - \sin \dfrac{t}{2}\right)\sin t, \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi) \\ z = -\cos \dfrac{t}{2}. \end{cases}$$

思考练习 解答下列问题:

1. 若对参数方程①不仅要考虑值域,还要考虑它的对应规则和定义域,这时参数方程表示的是一双侧曲面,它的边界由四条曲线组成,试写出四条边界曲线的参数方程.

2. 沿 Möbius 带中线剪开,所得曲面是单侧的还是双侧的?

§6 第二型曲面积分

6.1 第二型曲面积分的定义

先看一实例,设流体在空间某一区域内流动,它的速度 $\boldsymbol{v}$ 与位置有关:

$$\boldsymbol{v} = v_x(x, y, z)\boldsymbol{i} + v_y(x, y, z)\boldsymbol{j} + v_z(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

(v_x, v_y, v_z 为分量记号),称 $\boldsymbol{v}(x, y, z)$为稳定流速场,我们的问题是求稳定流速场流过某一曲面 S 的流量.

取定 S 的法向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,若在 S 的某些地方,流体沿 $\boldsymbol{n}$ 方向流过曲面,则流量算正的;若在 S 的某些地方,流体沿 $-\boldsymbol{n}$ 方向流过曲面,则流量算负的,现要求流过 S 的总的流量.

为此取一面积元素 ΔS_i,及 ΔS_i 上一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, M_i 点的法向量记为 $\boldsymbol{n}_i$,由于 ΔS_i 充分小,可以认为流过 ΔS_i 的流速为常向量,且等于 M_i 点的流速 $\boldsymbol{v}_i$,并设流体的密度为 1,则在单位时间内流过 ΔS_i 流量 ΔQ_i,即为图 19-13 中以 ΔS_i 为底,以 $\boldsymbol{v}_i$ 为斜高的斜柱体的体积:

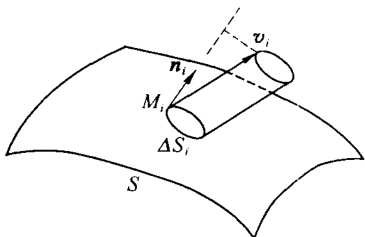


图 19-13

$$\Delta Q_i \approx (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\Delta S_i.$$

总的流量 Q 为

$$Q \approx \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{n}_i)\Delta S_i.$$

令 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\mathrm{diam}\{\Delta S_i\}\to 0$,求得流过曲面 S 的流量为:

$$Q = \iint_S(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

或

$$Q = \iint_S(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

注意,这不是被积函数 v_x, v_y, v_z 的第一型曲面积分,因为它除被积函数外,还依赖于曲面取定法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

定义 19.8 设 S 是一双侧曲面,取定 S 的一侧 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $R(x, y, z)$ 为 S 上有界函数,对 S 作分法

$\Delta=\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$. 记定侧曲面 ΔS_i 在 Oxy 平面上的有向投影为 $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i$ 的符号规定如下：若在 ΔS_i 上方向余弦 $\cos\gamma$ 为正,则投影面积取正号,即 $\Delta\sigma_i>0$;若在 ΔS_i 上方向余弦 $\cos\gamma$ 为负,则投影面积取负号,即 $\Delta\sigma_i<0$;若在 ΔS_i 上有一点方向余弦为零,则投影面积约定为零,即 $\Delta\sigma_i=0$ (图 19-14),在每一 ΔS_i 上任取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$作和

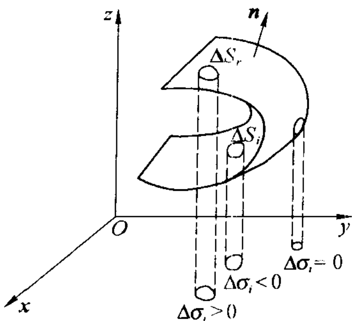


图 19-14

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i.$$

当 $\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}\{\Delta S_i\}\to 0$ 时,若

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i = I.$$

存在,且不依赖分法 Δ 和点 M_i 的取法,则称 I 是函数 $R(x, y, z)$在 S 选定侧上关于 Oxy 平面的**第二型曲面积分**,记作

$$I=\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

这里 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 象征曲面元素在 Oxy 平面上的有向投影,所以它是有向面积微元,不同于二重积分里的面积微元. 记号没有反映出曲面取的是那一侧,必须另加说明. 由定义看出,当曲面的一侧换成另一侧时,积分值相差一符号.

若把曲面元素 ΔS_i 投影到 Oyz 平面或 Ozx 平面上,则可得另外两个第二型曲面积分:

$$\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \quad \iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$$

应用中常常是把三个不同的函数关于三个坐标面的三个积分结合在一起,记作

$$\iint_S P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 P, Q, R 是 x, y, z 的函数.

6.2 计算公式

我们先考察简单情形,设 S 由显方程

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

给出,函数 $R(x, y, z)$在 S 上连续. $f(x, y) \in C^{(1)}(D)$,则 R 沿 S 上侧的曲面积分存在.

事实上,作 S 的一个分法 $\Delta_1 = \{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$,相应地有 D 的一个分法 $\Delta_2 = \{\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n\}$,由

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} > 0,$$

所以 $\Delta\sigma_i > 0$ $(i=1, 2, \cdots, n)$,和式

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R[\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \zeta_i)]\Delta\sigma_i,$$

上式右端为连续函数 $R[x, y, f(x, y)]$的 Riemann 和,因 $\|\Delta_1\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}\{\Delta S_i\} \to 0$ 等价于 $\|\Delta_2\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\operatorname{diam}\{\Delta\sigma_i\} \to 0$,故第二型曲面积分存在,且等于二重积分:

$$\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint_D R[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若取定曲面的下侧,这时 $\Delta\sigma_i < 0$,所以有

$$\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\iint_D R[x, y, f(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

若曲面 S 由参数方程给出,我们可以先证第二型曲面积分的计算公式,然后通过计算公式建立两型曲面积分间的联系.也可以先建立两型曲面积分间的联系,然后推出第二型曲面积分计算公式.

定理 19.5 设 S 为双侧光滑曲面,取定法向量

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

函数 $R(x, y, z)$在 S 上连续,则积分存在,且

$$\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

证明 对 S 作分法 $\Delta=\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$, ΔS_i 在 xOy 平面上的有向投影为 $\Delta\sigma_i$, $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\in\Delta S_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 我们来说明极限

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i \qquad ①$$

存在. 若在 ΔS_i 上 $\cos\gamma$ 不为零,由本章 3.1 节①式得

$$\Delta S_i=\iint_{(\Delta\sigma_i)}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|\cos\gamma|},$$

其中记号$(\Delta\sigma_i)$表示 ΔS_i 的投影集合,再由积分中值定理,并考虑 $\Delta\sigma_i$ 与 $\cos\gamma$ 有相同符号,得

$$\Delta S_i=\frac{\Delta\sigma_i}{\cos\overline{\gamma_i}} \quad 或 \quad \Delta\sigma_i=\cos\overline{\gamma_i}\Delta S_i,$$

其中$\overline{\gamma_i}$表示$(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i}, \overline{\zeta_i})\in\Delta S_i$ 点处法向量与 z 轴的夹角,若在 ΔS_i 上 $\cos\gamma$ 有零点,就取 $\cos\overline{\gamma_i}=0$,这时仍有 $\Delta\sigma_i=\cos\overline{\gamma_i}\Delta S_i$,于是有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta\sigma_i&=\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\overline{\gamma_i}\Delta S_i\\&=\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\cos\gamma_i\Delta S_i\\&\quad+\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)[\cos\overline{\gamma_i}-\cos\gamma_i]\Delta S_i\\&=I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中 γ_i 表示 $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$点处法向量与 z 轴的夹角. 因连续函数 $R(x, y, z)\cos\gamma$ 在 S 上第一型曲面积分存在,所以

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}I_1=\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}S.$$

又因 $\cos\gamma$ 在 S 上一致连续, R 有界,可得

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}I_2=0.$$

故①式极限存,且

$$\iint_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iint_S R(x, y, z)\cos\gamma\mathrm{d}S.\quad 证毕.$$

同理可证

$$\iint_S P(x, y, z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\iint_S P(x, y, z)\cos\alpha\mathrm{d}S,$$

$$\iint_S Q(x, y, z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_S Q(x, y, z)\cos\beta\mathrm{d}S.$$

把上述三个第二型曲面积分合起来可写成:

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$$

因

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

其中 A, B, C,见本章 3.2 节②式,"±"号选取由指定 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 所决定,所以由第一型曲面积分计算公式,可导出第二型曲面积分的计算公式:

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\pm\iint_D(PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

这里 P, Q, R 中的 x, y, z 要用参数方程

$$x=x(u, v),\ y=y(u, v),\ z=z(u, v),\ (u, v)\in D$$

代入.

6.3 例与应用

例 1 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_S x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 S 是顶点为(1, 0, 0), (0, 1, 0)和(0, 0, 1)的三角形的下侧.

解法一 曲面 S 的方程为

$$x+y+z=1,$$

取定法向量的方向余弦为:

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

将 I 化为第一型曲面积分得

$$I=-\iint_S\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}.$$

解法二 由对称性得

$$I=3\iint_S z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=-3\iint_{\substack{x\geqslant0,\ y\geqslant0\\ x+y\leqslant1}}(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-x-y)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{2}\int_0^1(1-y)^2\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}.$$

例 2 计算第二型曲面积分

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=R^2\,(z\geqslant0)$的上侧.

解 因 S 是关于 Oyz 平面对称的上半球面,所以 S 上关于 Oyz 平面对称的元素 ΔS_i 在 Oyz 平面上的有向投影 $\Delta\sigma_i$ 正好抵消,被积函数关于 x 是偶函数,直接由定义可得

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0.$$

同理得

$$\iint_S y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0.$$

于是有

$$I = \iint_S z^2 dx \wedge dy = \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} (R^2 - x^2 - y^2) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{2} R^4.$$

例 3 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$$

其中 S 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外侧.

解 S 的参数方程为

$$x = a\cos\theta\sin\varphi, \ y = b\sin\theta\sin\varphi, \ z = c\cos\varphi,$$

参数变化域 $D = \{(\theta, \varphi): 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$. Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ a\cos\theta\cos\varphi & b\sin\theta\cos\varphi & -c\sin\varphi \end{pmatrix},$$

由此求出

$$A = -bc\cos\theta\sin^2\varphi, \ B = -ac\sin\theta\sin^2\varphi, \ C = -ab\sin\varphi\cos\varphi.$$

因上半椭球面上一点的法向量的第三个分量大于零和 $C < 0$,所以计算公式前应取"$-$"号,故得

$$I = \iint_D [a^3\cos^3\theta\sin^3\varphi \cdot bc\cos\theta\sin^2\varphi + b^3\sin^3\theta\sin^3\varphi \cdot ac\sin\theta\sin^2\varphi$$

$$+ c^3\cos^3\varphi \cdot ab\sin\varphi\cos\varphi] d\theta d\varphi$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} [a^2\cos^4\theta\sin^5\varphi + b^2\sin^4\theta\sin^5\varphi + c^2\cos^4\varphi\sin\varphi] d\varphi$$

$$= 8abc\left(a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi + b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi\right.$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\sin\varphi d\varphi\right) = \frac{4}{5}\pi abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

例 4 双侧曲面 S 两侧均匀分布正、负电荷,求带电面在 $A(\xi, \eta, \zeta) \overline{\in} S$ 点所产生的双层位势

$$W(\xi, \eta, \zeta) = \iint_S \frac{\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}}{r^3} dS,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量,方向由负电荷指向正电荷,$\boldsymbol{r}=(x-\xi)\boldsymbol{i}+(y-\eta)\boldsymbol{j}+(z-\zeta)\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

解 对 S 是任意封闭曲面或非封闭曲面情形,我们将其留到下一章来解决.现在只考虑一特殊情形,S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$,内侧分布负电荷,外侧分布正电荷,所以 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向. A 为坐标原点和无穷远点.当 A 为原点时

$$W(0,\ 0,\ 0)=\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S \quad (\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

$$=\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{r^2}=\frac{1}{R^2}\iint_S \mathrm{d}S=\frac{1}{R^2}\cdot 4\pi R^2=4\pi.$$

当 A 为无穷远点时,

$$\lim_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\to+\infty} W(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\lim_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\to+\infty}\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\to+\infty}\iint_S \frac{\cos\langle\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\rangle}{r^2}\mathrm{d}S,$$

因 $|\cos\langle\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\rangle|\leqslant 1$, $\lim\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\to+\infty}\dfrac{1}{r^2}=0$,所以

$$\lim_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\to+\infty} W(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0.$$

注 下章我们要证明 S 是任意封闭曲面时,对曲面内任意一点 A,它的双层位势为 4π;对曲面外任意一点 A,它的双层位势为零.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 S 是光滑闭曲面,根据积分定义说明

$$\iint_S P(y,\ z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,\ z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$
$$+R(x,\ y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

2. 设 S 是关于坐标平面 Oxz 对称的光滑曲面,根据积分定义说明:

$$\iint_S Q(x,\ z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0,$$

$$\iint_S P(x, y, z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + R(x, y, z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$$

其中 $P(x, y, z)$和 $R(x, y, z)$关于 y 是奇函数.

3. 求第二型曲面积分

$$\iint_S z^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的外侧.

4. 计算第二型曲面积分

$$I = \iint_S \frac{x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

S 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

5. 求下列第二型曲面积分:

(1) $\iint_S x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ，S 是立体 $0\leqslant x \leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$ 边界面的外侧;

(2) $\iint_S x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ，S 是球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的上半部分的上侧;

(3) $\iint_S \left(\frac{\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z}{x} + \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x}{y} + \frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{z}\right)$ ，S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧;

(4) $\iint_S x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ ，S 是锥面 $x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$所示部分的下侧.

6. 设曲面 S 由隐函数方程 $F(x, y, z)=0$ 给出, S 的法向量取(F_x, F_y, F_z)方向,证曲面的面积 S 为

$$S = \iint_S \frac{F_x\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + F_y\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + F_z\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

7. 求第二型曲面积分

$$I=\iint_S (y+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(z+x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(y\geqslant 0)$ 被柱面 $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ 截下部分的上侧.

8. S 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的外法线单位向量, $d(x, y, z)$ 表示原点到 $(x, y, z)\in S$ 点切平面的距离,求下列积分:

(1) $\iint_S \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$;　　(2) $\iint_S d(x, y, z)\mathrm{d}S$;

(3) $\iint_S \frac{\mathrm{d}S}{d(x, y, z)}$.

注　　记

我们在讨论线积分存在时,假设曲线可求长;在讨论线积分计算公式时,假设曲线逐段光滑.对一般连续曲线,事情可能超出我们直观的想像.这里举一个连续曲线,其图象充满平面单位正方形的例子.为此要用到[0, 1]中实数二进位表示:$\forall x\in[0, 1]$, x 总可用二进位表示.

$$x=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}+\cdots=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 a_n 取 0 或 1 数码,如

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n}}+\cdots=0.010101\cdots,$$

还用到三进位表示:

$$x=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{3^n}+\cdots=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中 a_n 取 0, 1, 2 三个数码,如

$$\frac{1}{3}=0.1000\cdots=0.0222\cdots$$

当把区间[0, 1]逐次三等分时,只有分点才有两种表示,其它点表示法是唯一的.

任取一实轴上连续函数 $f(t)$,满足:$0\leqslant f(t)\leqslant 1$; $f(t+2)=f(t)$;

$$f(t)=\begin{cases}0 & \left(0\leqslant t\leqslant \frac{1}{3}\right),\\ 1 & \left(\frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1\right).\end{cases}$$

满足上述条件的函数 $f(t)$一定存在,现构造连续曲线:

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(3^{2n-1}t),\ \ y(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(3^{2n}t)\ \ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

由一致收敛性,知 $x(t)$, $y(t)$在$[0, 1]$上连续,证明其图象充满单位正方形 $I^2=[0,1]\times[0,1]$, $\forall\,(x_0, y_0)\in I^2$,用二进位表示有

$$x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n-1}}{2^n},\ \ y_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{2^n},$$

其中 a_i 是 0 或 1. 取

$$t_0=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2a_i}{3^{i+1}}\in[0,1]$$

来证 $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. 为此令 $k=1, 2, \cdots$,考察

$$\begin{aligned}f(3^k t_0)&=f\Big[\sum_{i=1}^{k-1}3^{k-i-1}(2a_i)+\sum_{i=k}^{\infty}3^{k-i-1}(2a_i)\Big]\\&=f\Big[\sum_{i=k}^{\infty}3^{k-i-1}(2a_i)\Big].\end{aligned}$$

若 $a_k=0$,则 $0\leqslant\sum\limits_{i=k}^{\infty}3^{k-i-1}(2a_i)=\sum\limits_{i=k+1}^{\infty}3^{k-i-1}(2a_i)\leqslant 2\sum\limits_{j=2}^{\infty}3^{-j}=\frac{1}{3}$,所以 $f(3^k t_0)=0=a_k$;若 $a_k=1$,则 $\frac{2}{3}\leqslant\sum\limits_{i=k}^{\infty}3^{k-i-1}(2a_i)\leqslant 2\sum\limits_{j=1}^{\infty}3^{-j}=1$,所以 $f(3^k t_0)=1=a_k$. 这就是说,无论 a_k 是 0 或 1,总有 $f(3^k t_0)=a_k$. 因此有

$$x(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(3^{2n-1}t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}a_{2n-1}=x_0,$$

$$y(t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}f(3^{2n}t_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}a_{2n}=y_0.$$

第二十章 各种积分之间的联系、场论

§1 Green 公式

1.1 Green[①] 公式

首先,引入单连通区域和多连通区域的概念.一平面连通区域 D,如果 D 内任一闭曲线都可以在 D 内连续地收缩为 D 内一点,则称此区域 D 为**单连通区域**,否则为**多连通**的.如图 20-1 所示的区域为单连通区域:

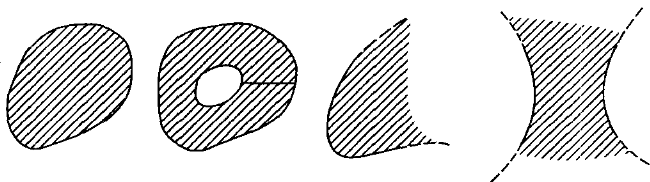


图 20-1

图 20-2 所示的区域为多连通区域:

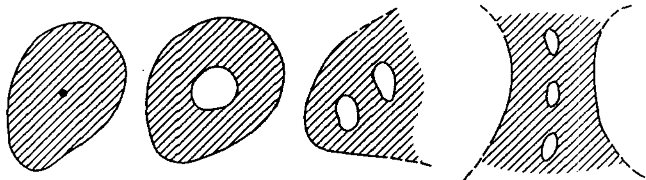


图 20-2

① 格林(英国数学家,1793～1841).

直观地说,单连通区域就是不含有“洞”甚至不含有“点洞”的区域,多连通区域是有“洞”的区域.

设区域 D 是由有限条可求长曲线 Γ_1, Γ_2, …, Γ_m,围成(图 20-3),当一人沿 Γ_i 行走时,区域 D 位于其左边,则规定人行走的方向为边界 Γ_i 的定向. 如图 20-3 中 Γ_1 的定向为逆时针方向, Γ_2, …, Γ_m 的定向为顺时针方向. 记号∂D 表示所有定向边界曲线 Γ_1, Γ_2, …, Γ_m 之和.

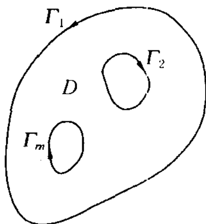


图 20-3

定理 20.1 设闭区域 D 是由有限条可求长闭曲线围成的, ∂D 表示定向边界的和. 函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$在 D 上连续,且有连续的一阶偏导数,则

$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 对闭区域分几步进行讨论.

(1) 若 D 是图 20-4 所示第一类闭区域:

$$D = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\},$$

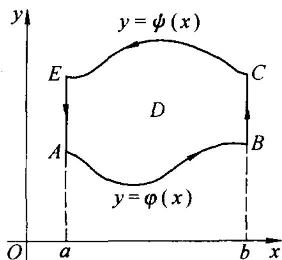


图 20-4

其中 $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[a, b]$. 这时有

$$\int_{\partial D} P(x, y)\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

事实上,由重积分化累次积分定理,得

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$= -\int_a^b P(x, \psi(x))\mathrm{d}x + \int_a^b P(x, \varphi(x))\mathrm{d}x. \qquad ①$$

再由第二型曲线积分计算,得

$$\int_{\widehat{AB}} P(x, y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x, \varphi(x))\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\widehat{CE}} P(x, y)\mathrm{d}x = -\int_a^b P(x, \psi(x))\mathrm{d}x.$$

显然有

$$\int_{\widehat{BC}} P(x, y)\mathrm{d}x = 0 = \int_{\widehat{EA}} P(x, y)\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_{\partial D} P(x, y)\mathrm{d}x = \left(\int_{\widehat{AB}} + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CE}} + \int_{\widehat{EA}}\right)P(x, y)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_a^b P(x, \psi(x))\mathrm{d}x + \int_a^b P(x, \varphi(x))\mathrm{d}x. \qquad ②$$

比较①与②式,即得

$$\int_{\partial D} P(x, y)\mathrm{d}x = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

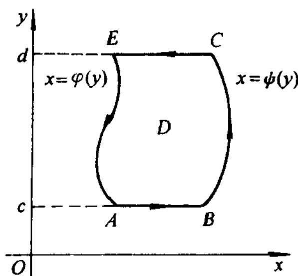


图 20-5

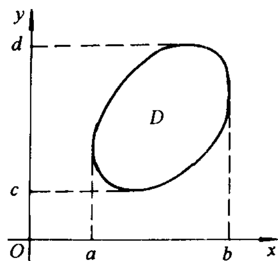


图 20-6

(2) 若 D 是图 20-5 所示第二类闭区域:

$$D = \{(x, y): c \leqslant y \leqslant d, \varphi(y) \leqslant x \leqslant \psi(y)\},$$

其中 $\varphi(y)$, $\psi(y)\in C[c, d]$,同理可证

$$\int_{\partial D} Q(x, y)\mathrm{d}x = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) 若 D 既是第一类又是第二类闭区域(图 20-6),则

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

事实上,只要把(1)与(2)的结果相加即得.

(4) 若 D 是由一条可求长曲线围成的单连通闭区域. 如果 D 能用平行于坐标轴的线段分成 n 个闭区域 D_1, D_2, $\cdots$, D_n,每个 D_i 既是第一类又是第二类闭区域(图 20-7),则

$$\int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

对 i 相加时,辅助线段上的线积分出现两次,方向相反,所以两线积分正好抵消,故有

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D_i} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

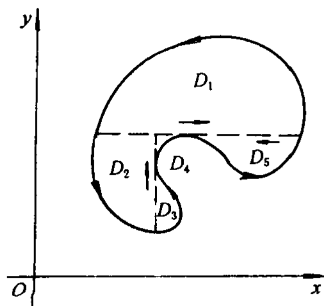


图 20-7

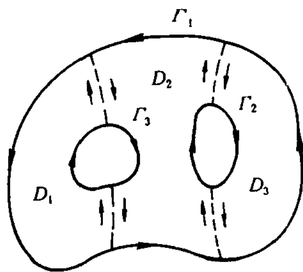


图 20-8

对一般单连通闭区域,证明要用到尚未讲过的知识,姑将其证明略去.

(5) 若 D 是由有限条可求长曲线围成的多连通闭区域,作辅助线使它变成若干个单连通区域之和(图 20-8),对每个单连通闭区域应用(4)的结果,然后相加即得. 证毕.

推论 20.1 若 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的闭区域, $P(x, y), Q(x, y)\in C^{(1)}(D)$,则

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial D}(P\cos\langle \boldsymbol{n}, x\rangle+Q\cos\langle \boldsymbol{n}, y\rangle)\mathrm{d}s.$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 取外法线方向.

证明 设 $\boldsymbol{t}$ 为边界 ∂D 的单位切向量, $[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}]$ 成右手系标架,所以

$$\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}\rangle=\cos\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}\rangle,\ \cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}\rangle=-\cos\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}\rangle.$$

于是应用 Green 公式得

$$\begin{aligned}&\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\partial D}-Q\mathrm{d}x+P\mathrm{d}y\\&=\int_{\partial D}[-Q\cos\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}\rangle+P\cos\langle \boldsymbol{t}, \boldsymbol{y}\rangle]\mathrm{d}s\\&=\int_{\partial D}[P\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}\rangle+Q\cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{y}\rangle]\mathrm{d}s.\end{aligned}$$ 证毕

1.2 例与调和函数

例 1 计算曲线积分

$$I=\int_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

其中 C 为如图 20-9 所示的可求长简单闭曲线.

解 因函数

$$P(x, y)=-\frac{y}{x^2+y^2},\ Q(x, y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

在原点不连续，所以不能在 C 所围的闭区域上应用 Green 公式. 为此作以原点为中心，以 ε 为半径的小圆周 C_ε，使其位在 C 内，方向如图 20-9 中所示，记 C 与 C_ε 所围成的闭区域为 D_ε，则 $\partial D_\varepsilon = C - C_\varepsilon$. 因为 D_ε 上有

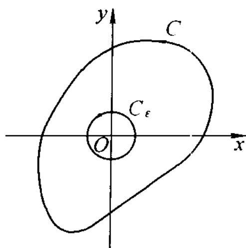


图 20-9

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以

$$0 = \iint\limits_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_{C} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int\limits_{C_\varepsilon} P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

于是有

$$I = \int\limits_{C} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \int\limits_{C_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{C_\varepsilon} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon^2 = 2\pi.$$

例 2 计算二重积分

$$I = \iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是以 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形闭区域(图 20-10).

解 令 $P(x, y)=0$, $Q(x, y)=\frac{1}{3}x^3$，由 Green 公式得

$$\iint\limits_{D} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\partial D}\frac{1}{3}x^3\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int\limits_{\overline{AB}} x^3\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int\limits_{\overline{BC}} x^3\mathrm{d}y + \frac{1}{3}\int\limits_{\overline{CA}} x^3\mathrm{d}y.$$

应用曲线积分计算公式，得

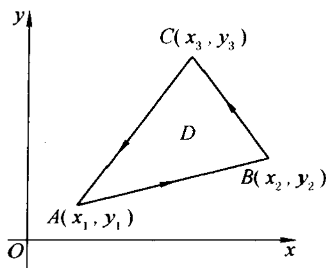


图　20-10

$$\int_{\overline{AB}} x^3 \mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} x^3 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \mathrm{d}x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x^4}{4} \Bigg|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2)}{4}.$$

同理有

$$\int_{\overline{BC}} x^3 \mathrm{d}y = \frac{1}{4}[(y_3 - y_2)(x_3 + x_2)(x_3^2 + x_2^2)],$$

$$\int_{\overline{CA}} x^3 \mathrm{d}y = \frac{1}{4}[(y_1 - y_3)(x_1 + x_3)(x_1^2 + x_3^2)],$$

所以

$$\iint_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12}[(y_2 - y_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2) + (y_3 - y_2)(x_3 + x_2)(x_3^2 + x_2^2) + (y_1 - y_3)(x_1 + x_3)(x_1^2 + x_3^2)].$$

设 D 为区域,函数 $u(x, y) \in C^{(2)}(D)$,若函数在 D 上满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0, \qquad ①$$

则称 $u(x, y)$ 是 D 上的**调和函数**,若令 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$,称之为 **Laplace 算子**,则①式也可写作

$$\Delta u \equiv 0.$$

为了讨论调和函数性质,先来证下面定理.

定理 20.2 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成,函数 u, $v\in C^{(2)}(D)$. 则有

(1) $\iint\limits_D \Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$;

(2) $\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int\limits_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s$;

(3) $\iint\limits_D (v\Delta u-u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}-u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}s$.

其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向.

证明 证(1)由方向导数公式和推论 20.1,得

$$\int\limits_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\int\limits_{\partial D}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}\rangle+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{y}\rangle\right)\mathrm{d}s$$
$$=\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证(2). 仍由方向导数公式和推论 20.1,得

$$\int\limits_{\partial D}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{x}\rangle+v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{y}\rangle\right)\mathrm{d}s$$
$$=\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证(3). 在上式中交换 u, v 位置得

$$\int\limits_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=\iint\limits_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

从(2)的结果减去上式即得(3). 证毕.

例 3 设 D 为区域, $u(x,\ y)\in C^{(2)}(D)$. 证明: $u(x,\ y)$是调和函数的充要条件为: 对 D 内任一圆周 C,且 C 所围闭圆属于 D,都有

$$\int\limits_C\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}s=0.$$

证明 设 $u(x,\ y)$为 D 上调和函数, C 所围的闭圆记作 $\Omega\subset D$,由定理 20.2 的(1).得

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s = \iint_\Omega \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

反之,任取$(x_0, y_0)\in D$,作圆周 C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\varepsilon^3$,使 C 所围的闭圆 $\Omega\subset D$. 由条件和积分中值定理得

$$0 = \int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s = \iint_\Omega \Delta u \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Delta u(\xi, \eta)\pi\varepsilon^2,$$

其中点$(\xi, \eta)\in\Omega$,上式消去 ε^2,然后令 $\varepsilon\to 0$,即得

$$\Delta u(x_0, y_0) = 0.$$

由(x_0, y_0)的任意性,故有 $\Delta u(x, y)\equiv 0$,即 $u(x, y)$为 D 上调和函数.

例 4 在例 3 条件下,证明: $u(x, y)$是 D 上调和函数的充要条件为 $\forall P_0(x_0, y_0)\in D$,有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$0<r<\mathrm{dist}(P_0, \partial D)=d$.

证明 设 $u(x, y)$为 D 上调和函数,取 C: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2(0<r<\mathrm{dist}(P_0, \partial D)=d)$. 这时 C 的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 即为半径 r 的方向,所以由例 3 得

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \mathrm{d}s = \int_C \frac{\partial u}{\partial r} \mathrm{d}s = 0.$$

再由曲线积分计算公式得

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

在 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon$ 上应用参变积分求导定理,得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0.\end{aligned}$$

记含参变量 r 的积分为 $f(r)$:

$$f(r) = \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \quad (0\leqslant r < d).$$

则上式可改写成

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r}=0 \quad (0\leqslant r\leqslant d-\varepsilon).$$

由此推出在$[0, d-\varepsilon]$上 $f(r)=\alpha$(常数). 令 $\varepsilon\to 0$,得 $f(r)=\alpha$ $(0\leqslant r<d)$,定出常数 α:

$$\alpha=f(0)=u(x_0, y_0)2\pi,$$

所以

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \quad (0\leqslant r<d).$$

上式说明调和函数在圆心的值等于圆周上值的积分平均.

反之,若平均值性质成立,上式两边对 r 求导,得

$$0=\frac{\partial}{\partial r}\int_0^{2\pi}u(x_0+r\cos\theta, y_0+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta,$$

根据上面推导可得 $\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta=0$, 因而

$$r\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta=\int_C\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0.$$

再由例 3 知 $u(x, y)$在 D 上调和.

利用调和函数的平均值性质,可以证明若调和函数不为常数,则它在区域 D 内取不到它的最大、最小值.

例 5 设闭区域 D 是由有限条逐段光滑曲线围成,调和函数 $u(x, y)$在边界∂D 上为零,则它在 D 上恒为零.

证明 在定理 20.2 的(2)中取 $v(x, y)=u(x, y)$,和 $u(x, y)$在边界上为零,得

$$\iint_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由此可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\equiv 0,\ (x, y)\in D.$$

所以 $u(x, y)\equiv\alpha$(常数),因 $u(x, y)$在边界上为零,故 $u(x, y)\equiv 0$.

这说明调和函数在区域内的值,由它在边界上的值唯一地

确定.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 D 是由逐段光滑闭曲线 C 围成的闭域,函数 $f, g\in C^{(1)}D$,证明分部积分公式:

(1) $\iint\limits_D f\dfrac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int\limits_C fg\,\mathrm{d}x-\iint\limits_D g\dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

(2) $\iint\limits_D f\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_C fg\,\mathrm{d}y-\iint\limits_D g\dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2. 求积分

$$I=\int\limits_C\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

(1) C 是以逆时针方向环绕原点两圈的可求长闭曲线;

(2) C 是不过原点的简单可求长闭曲线,且 C 所围闭区域 D 也不含原点.

3. 设 C 为光滑简单闭曲线,求积分

$$I=\int\limits_C\cos\langle \boldsymbol{l},\ \boldsymbol{n}\rangle\mathrm{d}s,$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 为确定的方向,$\boldsymbol{n}$ 为 C 的单位外法向量.

4. 计算下列积分:

(1) $\int\limits_{\partial D}xy^2\mathrm{d}y-yx^2\mathrm{d}x$, D: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$;

(2) $\int\limits_{\partial D}(x^2+y^3)\mathrm{d}y-(x^3-y^2)\mathrm{d}y$, D: $x^2+y^2\leqslant 1$;

(3) $\int\limits_{\widehat{\partial D}}\mathrm{e}^y\sin x\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-x}\sin y\mathrm{d}y$, D: $a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$.

5. 计算下列积分:

(1) $\int\limits_{\widehat{AO}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+y)^2\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AO}$ 是连接 $A(a, 0)$ 和 $O(0, 0)$ 的曲线 $x^2+y^2=ax$;

(2) $\int\limits_{\widehat{AO}}\mathrm{e}^x[(1-\cos y)\mathrm{d}x-(y-\sin y)\mathrm{d}y]$,其中 $\widehat{AO}$ 是连接

$O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线 $y=\sin x$;

(3) $\int\limits_{\widehat{AO}} e^{-(x^2-y^2)}[x(1-x^2-y^2)dx+y(1+x^2+y^2)dy]$,其中 $\widehat{AO}$ 是连接 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的曲线 $y=x^2$.

6. 设 $A>0$, $C>0$, $AC-B^2>0$. 求证

$$\int\limits_L \frac{x\,dy-y\,dx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{AC-B^2}},\ L: x^2+y^2=R^2.$$

(提示:先求出椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2\leqslant\varepsilon^2$ 的面积)

7. 计算曲线积分

$$I=\int\limits_L \frac{e^x}{x^2+y^2}[(x\cos y+y\sin y)dy+(x\sin y-y\cos y)dx],$$

其中 L 是包含原点在其内部的光滑简单闭曲线.

8. 设 $f(x,y)$在上半平面 $y>0$ 上连续可微. 证明:对于上半平面内任一光滑闭曲线 C,曲线积分

$$\int\limits_C f(x,y)(x\,dy-y\,dx)=0$$

的充要条件是 $f(x,y)$为一(-2)次齐次函数.

9. (1) 求曲线积分

$$I=\int\limits_{\partial D} e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy\,dx+\sin 2xy\,dy),$$

D: $|x|\leqslant R$, $0\leqslant y\leqslant b$;

(2) 证明: $\lim\limits_{R\to\pm\infty}\int_0^b e^{-(R^2-y^2)}\sin 2Ry\,dy=0$;

(3) 证明: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$.

10. 设 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的闭区域, u, $v\in C^{(2)}(D)$, $u(x,y)$为调和函数, $v(x,y)$在∂D 上为零,记作 $v|_{\partial D}=0$. 证明:

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

11. 闭区域 D 条件同上题, u, $w\in C^{(2)}(D)$, $u(x,y)$是调

和函数,且$[w-u]|_{\partial D}=0$(即 w, u 在边界上有相同的值). 证明:

$$\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

12. 设 $u(x, y)$为调和函数, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$关于变量 x 是以 2π 为周期的周期函数. 证明

$$f(y)=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x=C(\text{常数}).$$

§ 2 Gauss 公式

2.1 Gauss① 公式

Gauss 公式是联系空间区域上的三重积分与沿区域边界外侧的曲面积分的关系式,它是 Green 公式推论 20.1 的推广.

定理 20.3 设 V 是空间的一个有界闭区域,∂V 是由有限张分块光滑的双侧曲面组成,并取外法线方向. 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$在 V 上连续并有连续偏导数. 则

$$\iint\limits_{\partial V}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

证明 (1) 设 V 是如下第一类闭区域:

$$V=\{(x, y, z): (x, y)\in D, \varphi(x, y)\leqslant z\leqslant\psi(x, y)\},$$

其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 xOy 平面上闭区域, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)\in C^{(1)}(D)$. 则 V 的边界由下列曲面构成:

$$S_1: z=\psi(x, y), (x, y)\in D;$$
$$S_2: z=\varphi(x, y), (x, y)\in D;$$
$$S_3: \varphi(x, y)\leqslant z\leqslant\psi(x, y), (x, y)\in\partial D.$$

① 高斯(德国数学家, 1777~1855).

曲面 S_1 法向量朝上,所以法向量的第三个方向余弦 $\cos\gamma>0$;曲面 S_2 法向量朝下, $\cos\gamma<0$;柱面 S_3 的法向量与 z 轴垂直, $\cos\gamma=0$(S_3 可能由几个柱面组成). 由曲面积分计算公式得

$$\iint_{\partial V} R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint_{S_1} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \iint_{S_2} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \iint_{S_3} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D R(x, y, \psi(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D R(x, y, \varphi(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由三重积分化累次积分公式得

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z$$
$$= \iint_D [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是得到

$$\iint_{\partial V} R(x, y, z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ①$$

(2) 设 V 是如下第二类闭区域:

$$V = \{(x, y, z): (y, z)\in D, \varphi(y, z)\leqslant x\leqslant \psi(y, z)\},$$

其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 Oyz 平面上闭区域, $\varphi(y, z), \psi(y, z)\in C^{(1)}(D)$. 同理可证

$$\iint_{\partial V} P(x, y, z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ②$$

(3) 设 V 是如下第三类闭区域:

$$V = \{(x, y, z): (z, x)\in D, \varphi(z, x)\leqslant y\leqslant \psi(z, x)\},$$

其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 Ozx 平面上的闭区域, $\varphi(z, x), \psi(z, x)\in C^{(1)}(D)$. 同理可证

$$\iint_{\partial V} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ③$$

(4) 设 V 是四面体,我们来说明 Gauss 公式成立. 对四面体区域 V,根据六条棱在 Oxy 平面上投影组成的三角形个数,总可用辅助平面将其分成少则一个、多则四个第一类闭区域之和,设 $V=\bigcup\limits_{i=1}^{m}V_i$,由(1)得

$$\iint\limits_{\partial V_i}R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{V_i}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对 i 求和,因辅助柱面上曲面积分出现两次,方向相反,故两曲面积分正好抵消(事实上为零),所以有

$$\iint\limits_{\partial V}R(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{V}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

同理,对四面体区域 V 能用垂直于 Oyz 坐标面的平面将其分成有限个第二类闭区域之和,也能用垂直于 Ozx 坐标面的平面将其分成有限个第三类闭区域之和,则②、③两式成立. 将①、②、③三式相加,得

$$\iint\limits_{\partial V}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
$$=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \qquad ④$$

或记成

$$\iint\limits_{\partial V}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为边界 ∂V 的外法线方向的方向余弦.

(5) 对定理条件下的区域 V,若 V 单连通,先用 V 内区域 V_ε 逼近 V,光滑曲面 ∂V_ε 逼近 ∂V. 因 ∂V_ε 在 V 内部,我们可用多面体逼近 V_ε,用多面体的边界逼近 ∂V_ε. 而多面体可分成若干个四面体之和(要求四面体边界的每个三角形的内角 $\geqslant\alpha>0$),在每个四面体上公式④成立,因而得出多面体上公式④成立. 令多面体趋于 V_ε,得 V_ε 上公式④成立. 最后令 $\varepsilon\to0$ 得公

式④在 V 上成立. 多连通情况仿 Green 公式可证. 证毕.

2.2 例与应用

例 1 计算曲面积分

$$I=\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

S: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, 方向取外法线方向.

解 由高斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\&=\iiint_V 2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

计算三重积分时, 我们可以利用密度为 1 的球的重心公式, 并注意球 V 的重心为 $(a,\ b,\ c)$, 所以

$$\iiint_V x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=a\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\iiint_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=b\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\iiint_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=c\cdot\frac{4}{3}\pi R^3.$$

因此

$$I=\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c).$$

例 2 双侧曲面 S 两侧均匀分布正、负电荷, 求带电面在 $A(\xi,\ \eta,\ \zeta)\overline{\in}S$ 点的双层位势

$$W(\xi,\ \eta,\ \zeta)=\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 的单位法向量, 方向由负电荷指向正电荷, $\boldsymbol{r}=(x-\xi)\boldsymbol{i}+(y-\eta)\boldsymbol{j}+(z-\zeta)\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$.

解 若 S 是封闭曲面, 内侧分布负电荷, 外侧分布正电荷, 所以 $\boldsymbol{n}$ 为外法线方向, 当点 A 在 S 所围区域内部时. 以 A 为心,

以 ε 为半径作小球面 S_ε,使 S_ε 整个在 S 的内部. 记 S 与 S_ε 之间的区域为 V. 注意到

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=\iint_S\left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha+\frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta+\frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S,$$

令

$$P=\frac{x-\xi}{r^3},\ Q=\frac{y-\eta}{r^3},\ R=\frac{z-\zeta}{r^3},$$

求偏导数得

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(x-\xi)^2}{r^5},\ \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(y-\eta)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{1}{r^3}-\frac{3(z-\zeta)^3}{r^5}.$$

上述偏导数除 A 点外连续,且

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0.$$

在 S 与 S_ε 所围区域上应用 Gauss 公式,得

$$0=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S-\iint_{S_\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S,$$

其中 S_ε 取它所围球体的外法线方向,所以在 S_ε 上向量 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 方向一致,由此可得

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=\iint_{S_\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{S_\varepsilon}\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2=4\pi.$$

当点 A 在曲面 S 所围区域外部时,这时直接应用 Gauss 公式知

$$\iint_S\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S=0.$$

若 S 是非封闭曲面,从 A 点出发过 S 每一边界点作射线,这些射线组成一锥形曲面,记以 A 为心,以 ε 为半径的球面

(ε充分小时,球面与 S 不交)被锥形曲面截下的那部分为 S_ε, S_ε 的定向取球面的外法线方向. 锥形曲面落在 S_ε 与 S 之间的那部分曲面为 S_1,其定向取外法线方向. 曲面 S_ε, S_1, S 围成一区域 V,在 V 上应用 Gauss 公式,得

$$0 = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_1} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S - \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S.$$

因在 S_1 上向量 $\boldsymbol{r}$ 与外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 正交,故有

$$\iint\limits_{S_1} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S = 0,$$

$$\iint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}S}{\varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\omega\varepsilon^2 = \omega,$$

其中 ω 是以 A 为心,以 1 为半径的球面被锥形曲面所截下的那块球面的面积,称为锥形曲面所围空间的立体角的值. 所以双层位势等于 A 点观察曲面 S 时的立体角的值,当视线与 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 一致时,立体角的值取正号,否则取负号.

例 3 把 Laplace 算符 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 变换成球坐标形式.

解 球坐标变换 T: $x = r\sin\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\varphi$ 在区域 $0 < r < +\infty$, $0 < \varphi < \pi$, $0 < \theta < 2\pi$ 上单叶,在此单叶域上任取一小区域

$$\Omega:\ r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + \delta,\ \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 + \delta,$$
$$\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \delta\ (\delta > 0),$$

和函数

$$v(r, \varphi, \theta) = \sin\frac{\pi(r - r_0)}{\delta}\sin\frac{\pi(\varphi - \varphi_0)}{\delta}\sin\frac{\pi(\theta - \theta_0)}{\delta},$$

则 $v \in C^{(1)}(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega} = 0$,变换 T 把 Ω 映为 $T(\Omega)$,把 v 映为 $v \circ T^{-1}$,为书写简单起见,将 $v \circ T^{-1}$ 仍记作 v,它在 $T(\Omega)$ 边界

上取零值.推导中用到如下形式的 Gauss 公式:

$$\iint_{\partial V} v(P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$$
$$=\iiint_V\left(\frac{\partial v}{\partial x}P+\frac{\partial v}{\partial y}Q+\frac{\partial v}{\partial z}R\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$+\iiint_V v\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由于 v 在 $T(\Omega)$的边界上取值为零,应用上述 Gauss 公式,得

$$\iiint_{T(\Omega)}(v_xu_x+v_yu_y+v_zu_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=-\iiint_{T(\Omega)}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=-\iiint_{\Omega}v\Delta u\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \qquad ①$$

利用复合函数求偏导数得

$$\begin{cases}u_r=u_x\sin\varphi\cos\theta+u_y\sin\varphi\sin\theta+u_z\cos\varphi,\\ u_\varphi=u_x\cdot r\cos\varphi\cos\theta+u_y\cdot r\cos\varphi\sin\theta+u_z(-r\sin\varphi),\\ u_\theta=u_x\cdot(-r\sin\varphi\sin\theta)+u_y\cdot r\sin\varphi\cos\theta.\end{cases}$$

或将其写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix}u_r\\ \dfrac{1}{r}u_\varphi\\ \dfrac{1}{r\sin\varphi}u_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{bmatrix}.$$

对上式作转置运算,然后与把上式的 u 换成 v 所得式作点乘得

$$u_rv_r+\frac{1}{r^2}u_\varphi v_\varphi+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_\theta v_\theta$$
$$=\begin{bmatrix}u_x & u_y & u_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{bmatrix} = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z.$$

对①式左端先作球坐标变换,后用 Gauss 公式得

$$\iiint\limits_{T(\Omega)} (v_xu_x + v_yu_y + v_zu_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\left(u_rv_r + \frac{1}{r^2}u_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}u_\theta v_\theta\right)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\left(v_r\cdot r^2\sin\varphi u_r + v_\varphi\cdot\sin\varphi u_\varphi + v_\theta\frac{u_\theta}{\sin\varphi}\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega} v\left[\frac{\partial(r^2\sin\varphi u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\sin\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\theta}{\sin\varphi}\right)\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta. \qquad ②$$

比较①与②,得

$$\iiint\limits_{\Omega} v\left[\frac{\partial(r^2\sin\varphi u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\sin\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{u_\theta}{\sin\varphi}\right) - \Delta u r^2\sin\varphi\right]\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 0.$$

因 v 在 Ω 上非负,应用第一积分中值定理,然后令 $\delta\to 0$,得出在 $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$ 点有

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2u_r) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial(\sin\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}.$$

再由 $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$ 的任意性,得出 Laplace 算子的球坐标形式为

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设 T: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,如例 3 取平面区域 Ω 与函数 v. 利用

$$\iint\limits_{T(\Omega)} (v_xu_x + v_yu_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{T(\Omega)} v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

和
$$v_xu_x + v_yu_y = v_ru_r + \frac{1}{r^2}v_\theta u_\theta,$$

证明 Laplace 方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$在极坐标系下为：

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

2. 在柱坐标系下，Laplace 算子为：

$$\Delta u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. 利用高斯公式求下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_S x\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外侧；

(2) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S: $x^2+y^2\leqslant z\leqslant h$ 的边界面，取外侧；

(3) $\iint\limits_S (x-y+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S 为曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外侧；

(4) $\iint\limits_S (x+\mathrm{e}^{y+z})\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y+\mathrm{e}^{z+x})\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+\mathrm{e}^{y-x})\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S 为椭球面 $x^2+2y^2+4z^2+2xy+2yz+2xz=1$ 的外侧.

4. 计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_S (x^2-y^2)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y^2-z^2)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(z\geqslant 0)$ 的上侧；

(2) $\iint\limits_S (x+\cos y)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(y+\cos z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+(z+\cos x)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, S 为 $x+y+z=\pi$ 在第一象限部分，定向取上侧.

5. 设 V 是由有限张分块光滑曲面围成的闭区域，$\boldsymbol{n}$ 表示 ∂V 的外法线方向，u, $v\in C^{(2)}(V)$. 证明：

(1) $\displaystyle\iint\limits_{\partial V}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{V}\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\iint\limits_{\partial V}v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\iiint\limits_{V}v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{V}(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

6. 在上题条件下,设 $u(x, y, z)$是调和函数: $\Delta u\equiv 0$,且 $u|_{\partial V}=0$. 证明: $u(x, y, z)\equiv 0$, $(x, y, z)\in V$.

7. 在第 5 题条件下,设 $u(x, y, z)$是调和函数,且$[u-v]|_{\partial V}=0$. 证明:

$$\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\leqslant\iiint\limits_{V}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

8. 设 $u(x, y, z)$是区域 V 上调和函数,点 $P_0(x_0, y_0, z_0)\in V$,记 $d=\mathrm{dist}(P_0, \partial V)$,则有

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}u(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,\ y_0+r\sin\varphi\sin\theta,\ z_0+r\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\ (0<r<d).$$

9. 设 V 同第 5 题,函数 $f, g, h, u, v, w\in C^{(1)}(V)$,证明分部积分公式:

$$\iiint\limits_{V}(fu_x+gv_y+hw_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\partial V}fu\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+gv\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+hw\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\iiint\limits_{V}(f_xu+g_yv+h_zw)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

10. 设 S: $x^2+y^2+z^2=1$, V 是单位球, $f(x, y, z)$是 n 次齐次函数,且 $f\in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$,证明

$$\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S = \frac{1}{n}\iiint_V \Delta f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

§ 3　Stokes 公式

Stokes① 公式是联系空间曲面积分与其边界曲线积分的关系式,它是平面 Green 公式在空间维数的推广,而 Gauss 公式是 Green 公式在积分维数的推广.

定理 20.4　设 S 是空间中一光滑曲面,边界 ∂S 由有限条逐段光滑曲线组成,∂S 的定向由 S 的定向所确定. 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z) \in C^{(1)}(S)$(意即存在开集 G, $S \subset G$,且 $P, Q, R \in C^{(1)}(G)$). 则有

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \qquad ①$$

注　为了便于记忆,公式①常写成如下形式

$$\int_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S. \qquad ②$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为 S 取定法向量的方向余弦.

证明　(1) 设 S 由显函数

$$z = f(x, y), \ (x, y) \in D$$

给出,其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 Oxy 坐标平面上的闭区域,$f \in C^{(1)}(D)$(图 20-11),设 S 的定向 $\boldsymbol{n}$ 和 ∂S 的定向如图 20-11 所示. 由 ∂S 的定向决定其投影 ∂D 的定向,根据第二

① 斯托克斯(英国数学家,1819~1903).

型曲线积分的定义,不难看出

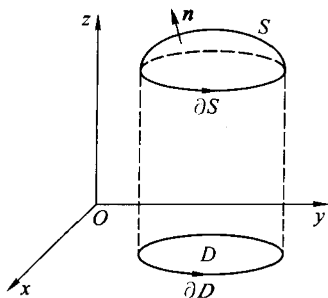


图 20-11

$$\int_{\partial S} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int_{\partial D} P(x, y, f(x, y))\mathrm{d}x.$$

对上式右端应用 Green 公式,得

$$\int_{\partial S} P(x, y, z)\mathrm{d}x = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad ③$$

另一方面,由 S 的参数式

$$x = x,\ y = y,\ z = f(x, y),\ (x, y) \in D$$

和曲面积分的计算公式$\left(A = -\dfrac{\partial f}{\partial x},\ B = -\dfrac{\partial f}{\partial y},\ C = 1\right)$,得

$$\begin{aligned}\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot 1\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad ④\end{aligned}$$

比较③与④式得到

$$\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \qquad ⑤$$

同理可证

$$\int_{\partial S} Q\mathrm{d}y = \iint_S -\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \qquad ⑥$$

(2) 设 S 由显函数

$$x = f(y, z),\ (y, z) \in D$$

给出,其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 Oyz 坐标平面上的闭区域, $f\in C^{(1)}(D)$,取定 S 和 ∂S 定向后,同理可证 $\left(A=1,\ B=-\dfrac{\partial f}{\partial y},\ C=-\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$:

$$\int_{\partial S} Q\mathrm{d}y=\iint_S -\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y; \quad ⑦$$

$$\int_{\partial S} R\,\mathrm{d}z=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x. \quad ⑧$$

(3) 设 S 由显方程

$$y=f(z,\ x),\ (z,\ x)\in D$$

给出,其中 D 是由有限条逐段光滑曲线围成的 Ozx 坐标平面上的闭区域, $f\in C^{(1)}(D)$,取定 S 和 ∂S 的定向,同理可证 $\left(A=-\dfrac{\partial f}{\partial x},\ B=1,\ C=-\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$:

$$\int_{\partial S} R\,\mathrm{d}z=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x; \quad ⑨$$

$$\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x=\iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x-\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y. \quad ⑩$$

(4) 设 S 为一三角形. 若三角形 S 同时可表示(1),(2),(3)中形式,这时公式⑤,⑦,⑨同时成立,相加即得

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} P\,\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=&\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\&+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\&+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

若三角形 S 可同时表示为(1),(2)中形式,在 Ozx 平面上投影为一线段,这时公式⑤、⑥、⑧同时成立,相加亦得 Stokes 公式. 若三角形 S 只能表示成(1)中形式,在 Oyz, Ozx 坐标面上投影为一线段,这时

$$\int_{\partial S} R\,\mathrm{d}z=0=\iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x.$$

将⑤,⑥和上式相加,亦得 Stokes 公式.

(5) 对于定理中曲面 S,总可用由三角形组成的多面形来逼近(要求每个三角形内角$\geqslant\alpha>0$),而在每个三角形上 Stokes 公式成立,然后相加,由于辅助线段上曲线积分两两抵消,得到多面形上 Stokes 公式成立. 最后取极限,即得曲面 S 上的 Stokes 公式,证毕.

例 计算曲线积分

$$I=\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线,从 z 轴正向看去 L 取逆时针方向(图 19-2).

解 平面 $x+y+z=0$ 被 L 所围部分取作 S,并取 S 的法向量向上,所以它的方向余弦为:

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

应用 Stokes 公式得

$$I=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_S-\frac{6}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S=-2\sqrt{3}\pi a^2.$$

思考练习 解答下列问题:

1. 设 S 为 Möbius 带, ∂S 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\left(2-\sin\dfrac{t}{2}\right)\cos t,\\ y=\left(2-\sin\dfrac{t}{2}\right)\sin t, \quad (0\leqslant t\leqslant 4\pi)\\ z=-\cos\dfrac{t}{2}.\end{cases}$$

证明:
$$\int_{\partial S}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=4\pi.$$
并说明 Stokes 公式不成立.

2. 求下列曲线积分:

(1) $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, L 为椭圆周: $x^2+y^2=R^2$, $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0, h>0)$,若从 Ox 轴正向看去,此椭圆周是依反时针方向进行的;

(2) $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, L 为圆周: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\tan\alpha\left(0<\alpha<\pi, \alpha\neq\frac{\pi}{2}\right)$,若从 Ox 轴正向看去,圆周是依反时针方向进行的;

(3) $\int_L y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, L 为曲线: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax$, $(z\geqslant 0, a>0)$ 若从 Ox 轴正向看去,曲线是依反时针方向进行的;

(4) $\int_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(y^2+x^2)\mathrm{d}z$, L 是曲线: $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $x^2+y^2=2rx(0<r<R, z>0)$,此曲线的方向如下:由它所包围的在球 $y^2+x^2+z^2=2Rx$ 外表面上的较小区域保持在左方.

3. 设 $f(x, y, z)$在上半空间 $z>0$ 上连续可微. 证明:对上半空间内任一光滑闭曲线 L,积分
$$\int_L f(x, y, z)[(z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(y-x)\mathrm{d}z]=0$$
的充要条件是 $f(x, y, z)$为一(-2)次齐次函数和
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\equiv 0.$$

§4 Brouwer 不动点定理

设 $I=[0,1]$，$f: I\to I$ 连续函数，那么一定存在一点 $x_0\in I$，使 $f(x_0)=x_0$，x_0 称为变换 f 的**不动点**. 事实上，若 $f(0)=0$ 或 $f(1)=1$，则 $x=0$ 或 1 即为 f 的不动点；否则 $f(0)>0$，$f(1)<1$，考虑函数 $g(x)=x-f(x)$，它在区间 I 上连续，且

$$g(0)=-f(0)<0,\ g(1)=1-f(1)>0,$$

由连续函数中间值定理，知存在 $x_0\in I$，使

$$g(x_0)=0 \quad \text{或} \quad f(x_0)=x_0.$$

把一维的不动点定理，推广到高维情形. 设 $B\subset\mathbf{R}^n$ 为中心在原点的闭单位球，向量函数 $\boldsymbol{f}: B\to B$ 连续，是否存在点 $\boldsymbol{x}_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in B$，使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$$

呢？1910 年 Brouwer 第一个证明了不动点存在定理. 我们只对二维情形加以证明，为此先证几个引理.

引理 20.1 设 $B: x_1^2+x_2^2\leqslant 1$，$\partial B: x_1^2+x_2^2=1$，则不存在满足下列条件的向量函数 $\boldsymbol{g}$：

(1) $\boldsymbol{g}|_{\partial B}=id_{\partial B}$(为$\partial B$ 到∂B 的恒等映射)；

(2) $\boldsymbol{g}: B\to\partial B$，$\boldsymbol{g}\in C^{(2)}(B)$.

证明 假设连续可微的向量函数 $\boldsymbol{g}: B\to\partial B$ 存在，记 $\boldsymbol{g}$ 的分量为 $g_1(x_1,x_2)$，$g_2(x_1,x_2)$. 考虑第二型曲线积分

$$\int_{\partial B} g_1\mathrm{d}g_2=\int_{\partial B} g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+g_1\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2.$$

由于对函数先求微分，然后限制到∂B 上，等于先把函数限制到∂B上，然后再求微分. 而 $g_2(x_1,x_2)$限制到∂B 上为 $g_2(x_1,x_2)\equiv x_2$，所以

$$\int_{\partial B} g_1\mathrm{d}g_2=\int_{\partial B} x_1\mathrm{d}x_2=\iint_B \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\pi. \qquad ①$$

又应用 Green 公式得

$$\int_{\partial B} g_1 \mathrm{d}g_2 = \int_{\partial B} g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

$$= \iint_B \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} + g_1 \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} - g_1 \frac{\partial^2 g_2}{\partial x_2 \partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$= \iint_B \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0. \qquad ②$$

上面最后一等式是因为在 B 上有

$$g_1^2(x_1, x_2) + g_2^2(x_1, x_2) \equiv 1,$$

上式分别对 x_1, x_2 求偏导数得方程组:

$$\begin{cases} g_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} + g_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \equiv 0, \\ g_1 \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} + g_2 \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \equiv 0. \end{cases}$$

方程组有非零解(g_1, g_2),必有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \equiv 0,$$

故有②式成立,显然这与①式相矛盾. 这矛盾说明引理 20.1 中函数 $\boldsymbol{g}$ 不存在. 证毕.

引理 20.2 设 B: $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, $\boldsymbol{f}$: $B \to B$ 为二次连续可微向量函数,则存在点 $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0) \in B$,使

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0.$$

证明 假设 $\boldsymbol{f}$ 无不动点,我们来构造一二次连续可微向量函数 $\boldsymbol{g}$: $B \to \partial B$. 任给 $\boldsymbol{x} \in B$,因 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$,点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$确定一条直线 $\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$,该直线起自 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$且通过 $\boldsymbol{x}$ 的射线交 ∂B 于一点记作 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$(图 20-12),这

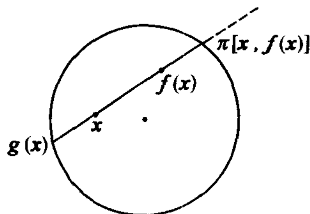


图 20-12

样$\forall \boldsymbol{x}\in B$,就有唯一$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\in\partial B$与其对应,所以它是一向量函数$\boldsymbol{g}: B\to\partial B$. 显然

$$\boldsymbol{g}\mid_{\partial B}=id_{\partial B}.$$

余下说明$\boldsymbol{g}$是二次连续可微的向量函数. 注意直线$\pi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$上的点可表示成

$$\boldsymbol{y}=t\boldsymbol{x}+(1-t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ t\in(-\infty, \infty).$$

要使$|\boldsymbol{y}|=1$,得

$$t^2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}+2t(1-t)\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+(1-t)^2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=1,$$

或

$$t^2\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2+2t\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))+(\mid\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2-1)=0.$$

解上述t的二次方程得两实根,只有一实根$t_1\geqslant 1$:

$$t_1=\frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x})}{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2}+\frac{\sqrt{[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))]^2+(1-\mid\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2)\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2}}{\mid\boldsymbol{x}-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\mid^2}$$

当$\boldsymbol{x}$在B上变动时,上式分母与分子中根式不为零,故由$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的每个分量二次连续可微,知$t_1$是$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$的二次连续可微函数,即$t_1(x_1, x_2)\in C^{(2)}(B)$,因而

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})=t_1\boldsymbol{x}+(1-t_1)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in C^{(2)}(B).$$

这与引理 20.1 相矛盾. 所以引理 20.2 得证. 证毕.

要把引理 20.2 中$\boldsymbol{f}: B\to B$二次连续可微条件改为$\boldsymbol{f}: B\to B$连续,需要连续函数用多项式一致逼近定理.

引理 20.3 设$f(x, y)$在D: $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$上二元连续,任给$\varepsilon>0$,存在二元多项式$P(x, y)$,使得在D上一致地成立

$$\mid f(x, y)-P(x, y)\mid<\varepsilon.$$

证明 令$P_n(x, y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)C_n^i x^i(1-x)^{n-i}\cdot C_n^j y^j(1-y)^{n-j}$. 任给$\varepsilon>0$,由于$f(x, y)$的一致连续性,存在$\delta>0$,当$|x'-x|\leqslant\delta$, $|y-y'|\leqslant\delta$时,有

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon.$$

记 $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$,则对 $\forall (x, y) \in D$,有

$$\begin{aligned}
&|f(x, y) - P_n(x, y)| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left|f(x, y) - f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\right| C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \\
&\quad C_n^j y^j (1-y)^{n-j}. \\
&\leqslant \sum_{\left|\frac{i}{n}-x\right|<\delta}\ \sum_{\left|\frac{j}{n}-y\right|<\delta} + \sum_{\left|\frac{i}{n}-x\right|\geqslant\delta}\ \sum_{j=0}^{n} + \sum_{i=0}^{n}\ \sum_{\left|\frac{j}{n}-y\right|\geqslant\delta} \\
&\leqslant \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{i}{n}-x\right|\geqslant\delta} C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \\
&\quad + 2M \sum_{\left|\frac{j}{n}-y\right|\geqslant\delta} C_n^j y^j (1-y)^{n-j}
\end{aligned}$$

(利用 $\sum\limits_{k=0}^{n}(nx-k)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$)

$$\leqslant \varepsilon + 2M\frac{1}{n^2\delta^2}nx(1-x) + 2M\frac{1}{n^2\delta^2}ny(1-y)$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{M}{n\delta^2} < 2\varepsilon,\text{只要取 } n > \left[\frac{M}{\varepsilon\delta^2}\right].\text{证毕.}$$

经平移变换可得矩形 D: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ 上的连续 $f(x, y)$可用多项式 $P(x, y)$一致逼近. 为说明单位圆上的连续函数也可用多项式一致逼近,只要先将单位圆上连续函数 $f(x, y)$连续扩充到全平面,记为 $\tilde{f}(x, y)$:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ f\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

则在正方形 D: $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$ 上 $\tilde{f}(x, y)$可用多项式一致逼近,特别在单位圆上 $f(x, y)$可用多项式一致逼近.

若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$是单位圆 B: $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$ 上的连续向量函数,其分量函数记为 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 多项式函数 $P_i(x_1, x_2)$,使

$$|f_i(x_1, x_2) - P_i(x_1, x_2)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \ (i = 1, 2).$$

所以存在多项式向量函数 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (P_1(x_1, x_2), P_2(x_1, x_2))$,使

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{2}[f_i(x_1, x_2) - P_i(x_1, x_2)]^2} < \varepsilon.$$

定理 20.5(Brouwer) 设 B: $x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1$, $\boldsymbol{f}$: $B \to B$ 为连续向量函数,则存在点 $\boldsymbol{x}_0 \in B$,使 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$.

证明 假设 $\boldsymbol{f}$: $B \to B$ 无不动点,则 $\forall \boldsymbol{x} \in B$,有

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}| > 0.$$

因 B 是有界闭集,所以存在常数 $c > 0$,使

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}| > c, \ \forall \boldsymbol{x} \in B.$$

根据引理 20.3 后的论述,存在多项式向量函数 $\boldsymbol{P}$: $B \to \mathbf{R}^2$,使

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})| < \frac{c}{4}, \ \forall \boldsymbol{x} \in B.$$

由此推出集合 $\boldsymbol{P}(B)$ 包含在半径为 $1 + \frac{c}{4}$ 的圆内. 定义二次连续可微映射.

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{1 + \frac{c}{4}}\boldsymbol{P}: B \to B.$$

$\forall \boldsymbol{x} \in B$,有

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| &= |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \\ &\leqslant |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})| + |\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \\ &\leqslant \frac{c}{4} + \frac{\frac{c}{4}}{1 + \frac{c}{4}}|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})| \\ &\leqslant \frac{c}{4} + \frac{c}{4} = \frac{c}{2}. \end{aligned}$$

如此一来,对 $\forall \boldsymbol{x} \in B$,有

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))|$$

$$\geqslant |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}|-|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|$$

$$>c-\frac{c}{2}=\frac{c}{2}>0.$$

上式表明二次连续可微映射 $\boldsymbol{g}: B\to B$ 无不动点,这与引理 20.2 矛盾. 所以定理结论成立. 证毕.

利用定理结果可改进引理 20.1.

推论 20.2 设 $B: x_1^2+x_2^2\leqslant 1$,则不存在连续映射 $\boldsymbol{g}: B\to\partial B$, $\boldsymbol{g}|_{\partial B}=id_{\partial B}$.

证明 假设存在连续映射 $\boldsymbol{g}: B\to\partial B$,满足 $\boldsymbol{g}|_{\partial B}=id_{\partial B}$. 考虑映射

$$\boldsymbol{f}: \partial B\to\partial B,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}.$$

显然 $\boldsymbol{f}$ 为连续映射,复合映射

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}: B\to\partial B$$

仍连续. 根据 Brouwer 定理,有不动点 $\boldsymbol{x}_0\in B$ 使 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$. 因 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0)\in\partial B$,知 $\boldsymbol{x}_0\in\partial B$. 又 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$,得

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

即映射 $\boldsymbol{f}$ 有不动点 $\boldsymbol{x}_0$,而 $\boldsymbol{f}$ 为关于原点的对称映射,显然无不动点,这矛盾说明满足推论条件的连续映射 $\boldsymbol{g}$ 不存在. 证毕.

思考练习 解答下列问题:

1. Brouwer 定理说明闭单位圆有不动点性质. 一般来说,若集合 B 有不动点性质,又存在同胚映射 $\boldsymbol{\varphi}: B\to D$,则 D 也有不动点性质.

2. 说明全平面 $\mathbf{R}^2$ 和开单位圆没有不动点性质.

3. 举出一有界闭集没有不动点性质.

4. 设 B 为闭位圆, S 为∂B 上的闭圆弧. 若 S 上的恒等映射 $\mathrm{id}|_S$ 可连续地开拓到 B,记开拓后映射为 $r: B\to S$. 证明任一连续映射 $f: S\mapsto S$,一定存在不动点 $x_0\in S$: $f(x_0)=x_0$.

§5 曲线积分与路径无关性

定义 20.1 设 D 为空间区域,函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,$

z), $R(x, y, z)$在 D 上连续. 如果对 D 内任意两点 A, B,和对 D 内任一连接 A, B 的逐段光滑曲线 Γ,若曲线积分

$$\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \qquad ①$$

的值只与 A, B 有关,而与曲线 Γ 选取无关,则称曲线积分①在 D 内与路径无关.

若把函数 P, Q, R 看成区域D 上向量场$\boldsymbol{F}$ 的三个分量,积分①表示单位质量由 A 沿 Γ 运动到B 时,向量场 $\boldsymbol{F}$ 所作的功,所以讨论线积分与路径无关,即讨论什么样向量场作功与路径无关.

定理 20.6 设 D 为空间区域,函数 R, Q, $R\in C(D)$. 则曲线积分①在 D 上与路径无关的充要条件是: 对 D 内任一逐段光滑的简单闭曲线Γ,积分

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

证明 证必要性. 给定 D 内任一逐段光滑的简单闭曲线Γ,在Γ上任取两点A, B,且将Γ分成两段Γ_1 和Γ_2^-, Γ_1 是由A沿 Γ定向至B 那个弧段, Γ_2^- 是由 B 沿 Γ 定向至A 那个弧段(图 20-13), Γ_2 表示与 Γ_2^- 方向相反的曲线,则由定理条件得

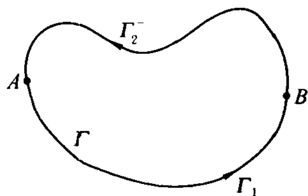


图 20-13

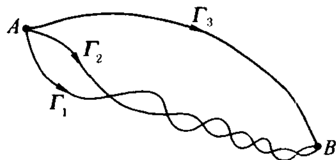


图 20-14

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\\ =& \int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z\end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

证充分性. 在 D 内任取两点 A, B,和连续 A, B 的两条逐段光滑曲线 Γ_1, Γ_2. 若 Γ_1 和 Γ_2^- 组成一简单闭路 Γ,则由条件得

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z - \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0.$$

上式说明曲线积分①与路径 Γ_1, Γ_2 无关,若 Γ_1 与 Γ_2^- 不组成一简单闭路,总可求出一条连接 A, B 的逐段光滑曲线 Γ_3,使 $\Gamma_1 \cup \Gamma_3^-$, $\Gamma_2 \cup \Gamma_3^-$ 为一简单闭路(图 20-14),由上知

$$\int_{\Gamma_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_3} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Gamma_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

证毕.

例 1 证曲线积分

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$$

在 (1)D: $y>0$ 上与路径无关;

(2) $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0, 0)\}$ 上与路径有关.

证明 (1) 设 Γ 为 D 内逐段光滑简单闭路,记 Γ 所围区域为 Ω,应用 Green 公式,得

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

由定理 20.6 知曲线积分在 D 上与路径无关.

(2) 取 Γ 为 $x^2+y^2=1$,沿逆时针方向. 这时有

$$\int_{\Gamma} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \int_{x^2+y^2=1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

由定理 20.6 知曲线积分在 D 上与路径有关.

这例说明,对同一向量函数

$$F=-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j},$$

在小的区域上曲线积分与路径无关,在大的区域上可以与路径有关.所以谈曲线积分与路径无关时,一定要指明在什么区域上讨论.

定理 20.7 设 D 为空间区域,函数 $P, Q, R\in C(D)$,则曲线积分①在 D 上与路径无关的充要条件是:在 D 上存在连续可微函数 $u=u(x, y, z)$,使

$$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

称 $u(x, y, z)$ 是被积表达式的原函数.且

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=u\mid_A^B.$$

证明 证充分性.设 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 为 D 内任取的两点,和 D 内任一连接 A, B 的逐段光滑曲线 Γ:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t)\quad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

其中 $x_1=x(\alpha)$, $y_1=y(\alpha)$, $z_1=z(\alpha)$ 和 $x_2=x(\beta)$, $y_2=y(\beta)$, $z_2=z(\beta)$.则由曲线积分的计算公式和定理的条件,得

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\int_\alpha^\beta\{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t)\\&\quad+Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t)\\&\quad+R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}u[x(t), y(t), z(t)]}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\\&=u[x(t), y(t), z(t)]\mid_\alpha^\beta\\&=u(x_2, y_2, z_2)-u(x_1, y_1, z_1)\\&=u\mid_A^B.\end{aligned}$$

这表明曲线积分的值与路径 Γ 无关,只依赖起点 A 和终点 B.且曲线积分值等于原函数在终点的值减去它在起点的值.

证必要性. 取定 $A(x_0, y_0, z_0)\in D$, 对任意一点 $B(x, y, z)\in D$, 由于曲线积分与路径无关, 所以积分

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta+R\mathrm{d}\zeta$$

的值只与 B 有关, 这样就定义了 D 上的函数, 记作

$$u(x, y, z)=\int_{\widehat{AB}} P(\xi, \eta, \zeta)\mathrm{d}\xi+Q(\xi, \eta, \zeta)\mathrm{d}\eta+R(\xi, \eta, \zeta)\mathrm{d}\zeta.$$

再取一点 $B'(x+\Delta x, y, z)\in D$, 使线段 $\overline{BB'}\subset D$, 于是有

$$\begin{aligned}&u(x+\Delta x, y, z)-u(x, y, z)\\&=\int_{\widehat{AB'}} P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta+R\mathrm{d}\zeta-\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta+R\mathrm{d}\zeta\\&=\int_{\overline{BB'}} P\mathrm{d}\xi+Q\mathrm{d}\eta+R\mathrm{d}\zeta\\&=\int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y, z)\mathrm{d}\xi\\&=P(x+\theta\Delta x, y, z)\Delta x\quad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

所以得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x, y, z)-u(x, y, z)}{\Delta x}=P(x, y, z).$$

同理可证

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q,\ \frac{\partial u}{\partial z}=R.$$

即 $\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$. 证毕.

例 2 设 D 为不含原点的区域, 考虑 D 上向量函数

$$f(r)\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

其中 $f(r)$ 在 $r>0$ 上连续, 求证曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} f(r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$

在 D 上与路径无关.

证明 任取一元连续函数 $f(r)r$ 的一个原函数 $u(r)$. 则函数 $u=u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ 的微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}\mathrm{d}z\\ &=f(r)r\cdot\frac{x}{r}\mathrm{d}x+f(r)r\frac{y}{r}\mathrm{d}y+f(r)r\frac{z}{r}\mathrm{d}z\\ &=f(r)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

根据定理 20.7 知曲线积分在 D 上与路径无关.

下一定理要求 D 是单连通区域. 设 D 是平面或空间区域, 若对于 D 内任一连续闭曲线 Γ, 总能在 D 内连续地收缩成 D 内一点, 则称 D 为单连通区域. 若 D 是平面区域, 单连通条件直观上即为无“洞”区域; 若 D 是空间区域, 有“洞”区域可以是单连通区域, 如两同心球面之间的区域为单连通区域, 而圆环面所围区域不是单连通区域.

定理 20.8 设 D 为空间单连通区域, 函数 $P, Q, R\in C^{(1)}(D)$. 则曲线积分①在 D 上与路径无关的充要条件是: 在 D 上有

$$\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}.$$

或向量

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\equiv 0.$$

$\left(D\text{ 为平面单连通区域时, 充要条件为 }\dfrac{\partial Q}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$

证明 证必要性. 假设曲线积分①与路径无关, 由定理 20.7 存在 D 上连续可微函数 $u=u(x, y, z)$, 使

$$\frac{\partial u}{\partial x}\equiv P,\ \frac{\partial u}{\partial y}\equiv Q,\ \frac{\partial u}{\partial z}\equiv R.$$

因此有

$$\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\equiv\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}.$$

证充分性. 设 Γ 为 D 内任一逐段光滑简单闭曲线,由于 D 是单连通,总可求出 D 内曲面 S,使 $\partial S=\Gamma$,并使曲面 S 的定向与 Γ 的方向符合 Stokes 公式的要求,所以有

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0.$$

若 Γ 如图 20-15 所示打结的简单闭曲线或如 Möbius 带的边界,总可引入辅助曲线把问题变成上面讨论过的情况,由于辅助线上积分出现两次,方向相反正好抵消,同样可得

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0.$$

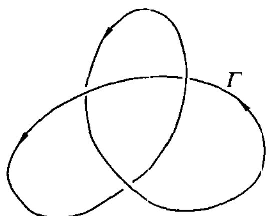


图 20-15

所以由定理 20.6 知曲线积分①在 D 上与路径无关. 证毕.

再来分析例 1. 当 D 是上半平面时,因 D 是单连通区域,和

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

所以由定理 20.8 知线积分

$$\int_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

在上半平面上与路径无关,这时有原函数

$$\theta=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x},\ (x,\ y)\ \text{在第一象限},\\ \dfrac{\pi}{2},\ x=0,\ y>0,\\ \pi+\arctan\dfrac{y}{x},\ (x,\ y)\ \text{在第二象限}.\end{cases}$$

θ在上半平面上连续,且

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

根据定理 20.7 同样得到线积分与路径无关.

当 D 是二连通区域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\}$时,即使在 D 上有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$$

也得不出线积分与路径无关,这说明定理 20.8 中单连通条件是不可少的. 在二连通区域 D 上,极角函数 θ 是多值函数,即使

$$d\theta = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

因在二连通域 D 上取不出单值连续分支,所以也得不出线积分与路径无关.

设 D 为平面区域, $u(x,\ y)$是 D 上调和函数,若在 D 上存在函数 $v(x,\ y) \in C^{(2)}(D)$,满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

则称函数 $v(x,\ y)$是 $u(x,\ y)$的共轭调和函数. 容易看出 $v(x,\ y)$是调和函数:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0.$$

例 3 若 D 是平面单连通区域, $u(x,\ y)$是 D 上调和函数,则一定存在 $u(x,\ y)$的共轭调和函数 $v(x,\ y)$.

证明 考虑 D 上曲线积分

$$\int_\Gamma -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy.$$

因

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

所以由定理 20.8 知曲线积分在 D 上与路径无关. 再由定理 20.7,存在 D 上连续可微函数 $v(x,\ y)$,且使

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

这说明 $v(x, y) \in C^{(2)}(D)$，且是 $u(x, y)$的共轭调和函数.

最后我们讨论原函数的求法，设曲线积分

$$\int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$$

在 D 上与路径无关，由定理 20.7 存在原函数 $u(x, y)$，使 $du = P\,dx + Q\,dy$，那么怎么求函数 $u(x, y)$呢？因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P,\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q.$$

对上面第一式固定 y 求不定积分，得

$$u(x, y) = \int P\,dx + \varphi(y).$$

任意常数应为 y 的函数. 这样求 $u(x, y)$归结为求数 $\varphi(y)$. 又因

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx = Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx,$$

所以

$$\varphi(y) = \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy + C.$$

余下只要说明 $Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx$ 只是 y 的函数. 事实上，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right] = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P\,dx\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0.$$

故 $Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx$ 只含变量 y，于是求出函数

$$u(x, y) = \int P\,dx + \int\left[Q - \frac{\partial}{\partial y}\int P\,dx\right]dy + C.$$

例 4 设$\widehat{AB}$为连接 $A(0, 0)$, $B(a, b)$的曲线，求曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} (10xy - 8y)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy.$$

解 因

$$\frac{\partial(5x^2-8x+3)}{\partial x}=10x-8=\frac{\partial(10xy-8y)}{\partial y},$$

所以在全平面上线积分与路径无关. 现求原函数 $u(x, y)$. 由于

$$\int P\mathrm{d}x=\int(10xy-8y)\mathrm{d}x=5x^2y-8xy,$$

$$\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int 3\mathrm{d}y=3y+C.$$

(具体演算时,只需把 Q 内含有 x 的项删去,对剩余的项进行积分即可)故得原函数为:

$$u(x, y)=5x^2y-8xy+3y+C.$$

因而

$$\begin{aligned}&\int_{\widehat{AB}}(10xy-8y)\mathrm{d}x+(5x^2-8x+3)\mathrm{d}y\\&=(5x^2y-8xy+3y)\Big|_{(0,\,0)}^{(a,\,b)}\\&=5a^2b-8ab+3b.\end{aligned}$$

空间情形求原函数 $u(x, y, z)$的公式为:

$$\begin{aligned}u(x, y, z)=&\int P\mathrm{d}x+\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\&+\int\left[R-\frac{\partial}{\partial z}\int P\mathrm{d}x-\frac{\partial}{\partial z}\int\left[Q-\frac{\partial}{\partial y}\int P\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

具体求时,先求不定积分$\int P\mathrm{d}x$, 再把 Q 中含有 x 的项删去,对变量 y 求不定积分,然后再把 R 中含有 x 和含有 y 的项删去,对变量 z 求不定积分. 将这三部分不定积分相加即为 $u(x, y, z)$.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 $P, Q\in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$,线积分

$$I=\oint_C P(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}x+Q(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}y$$

与常数 α, β无关,证明:

(1) $\oint_C P_x'(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}x + Q_x'(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}y = 0$,

$\oint_C P_y'(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}x + Q_y'(x+\alpha, y+\beta)\mathrm{d}y = 0$;

(2) $Q_x'(x, y) - P_y'(x, y) = 2K$ (常数);

(3) $\exists u \in C^{(2)}(\mathbf{R}^2)$,使 $Q = \dfrac{\partial u}{\partial y} + kx$, $P = \dfrac{\partial u}{\partial x} - ky$;

(4) 求出积分值 I.

2. 下列线积分在区域上是否与路径无关?

(1) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, D: $y > 0$;

(2) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, D: $x^2 + y^2 > 0$.

3. 求下列曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x + (x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$, $A(0, 0)$, $B(2, 1)$;

(2) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x^2+y+z)\mathrm{d}x + (y^2+x+z)\mathrm{d}y + (z^2+x+y)\mathrm{d}z$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$;

(3) $\displaystyle\int_{\widehat{AB}} (x^2-2yz)\mathrm{d}x + (y^2-2xz)\mathrm{d}y + (z^2-2xy)\mathrm{d}z$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 3)$.

4. 试求下列被积表达式的原函数:

(1) $(4x^3y^3 - y^2)\mathrm{d}x + (3x^4y^2 - 2xy)\mathrm{d}y$;

(2) $[(x+y+1)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y]\mathrm{d}x + [\mathrm{e}^x - (x+y+1)\mathrm{e}^y]\mathrm{d}y$.

5. 通过求原函数求曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (yz\mathrm{e}^{xyz} + 2x)\mathrm{d}x + (zx\mathrm{e}^{xyz} + 3y^2)\mathrm{d}y + (xy\mathrm{e}^{xyz} + 4z^3)\mathrm{d}z$;

(2) $\int_{(1,2,3)}^{(x,y,z)}[2x\sin(x+y+z)+x^2\cos(x+y+z)]\mathrm{d}x+x^2\cos(x+y+z)(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$.

6. 设 D 为空间区域,函数 $P, Q, R\in C^{(1)}(D)$. 则曲线积分 $\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 与路径无关的充要条件是线积分

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}P+y\mathrm{d}Q+z\mathrm{d}R.$$

在 D 上与路径无关.

7. 求下列调和函数在 D: $y>0$ 上的共轭调和函数:

(1) $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, (2) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; (3) $u=\mathrm{e}^x\cos y$.

8. 设 D 为圆环: $0<a^2<x^2+y^2<b^2<+\infty$, $u(x, y)$是 D 上调和函数. 证明: $u(x, y)$有共轭调和函数的充要条件是:

$$\int_{x^2+y^2=r^2}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0\quad(a<r<b).$$

9. 设 $f(x, y, z)$在 $z>0$ 上连续可微. 证明: 线积分

$$\int_\Gamma f(x, y, z)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$$

与路径无关的充要条件为: $f(x,y,z)=g(r)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

10. 设 $f(x, y)\in C^{(2)}(D)$, 且 $f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2\neq 0$. 则对 $\forall(x_0, y_0)\in D$, 记 $u_0=f_x(x_0, y_0)$, $v_0=f_y(x_0, y_0)$, 存在 (x_0, y_0)点邻域 U 和(u_0, v_0)点邻域 V, 变换

$$\begin{cases}u=f_x(x, y),\\ v=f_y(x, y),\end{cases}\quad U\to V$$

同胚(逆变换存在定理结论). 证明: 逆变换 $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$在 V 上可表示成:

$$\begin{cases}x=g_u(u, v),\\ y=g_v(u, v).\end{cases}$$

(提示: 无妨设 U、V 是单连通区域, 证在 V 上线积分

$$\int_{\Gamma} x(u,\ v)\mathrm{d}u + y(u,\ v)\mathrm{d}v$$

与路径无关)

§6 场论初步

6.1 数量场与向量场

我们知道物理量有的是数量,有的是向量.物理量在空间区域上的分布在物理上通常称为**场**.如温度场、密度场为**数量场**;引力场、电场、磁场为**向量场**.若场随时间而变化,称为**不稳定场**;若场不随时间而变化,称为**稳定场**.稳定数量场可以用一三元函数

$$u = u(x,\ y,\ z)$$

来表示;稳定向量场可用一向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,\ y,\ z) = P(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i} + Q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j} + R(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k}$$

来表示.

给定一数量场 $u(x,\ y,\ z)$,在场所占的区域 D 上,方程

$$u(x,\ y,\ z) = c(c\ 为常数)$$

确定一**等位面**.

若在空间区域 D 上给定一向量场 $\boldsymbol{F}=(P,\ Q,\ R)$,称 D 中满足方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$$

的曲线为**向量线**.向量线每点的切向量与向量场 $\boldsymbol{F}$ 在该点的方向相重合.过区域每点有且仅有一条向量线,任意两条向量线彼此不交,所有向量线充满整个区域 D.

D 内任取一异于向量线的曲线作准线,过准线每点引向量线,这些向量线组成的曲面称为**向量面**.当准线是闭曲线时,这时向量面成管形状,称为**向量管**.

6.2 数量场的梯度

给定一数量场 $u(x, y, z)$,我们称偏导数组成的向量为**梯度**,记作

$$\operatorname{grad}u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

若有一单位向量

$$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

则数量场 $u(x, y, z)$沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为:

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \operatorname{grad}u \cdot \boldsymbol{l}.$$

由此看出,$\boldsymbol{l}$ 取梯度方向时函数增加最快;这时方向导数即为 $|\operatorname{grad}u|$. 所以数量场在一点的梯度也可如下定义:梯度为一向量,它的方向是函数增加最快的方向,它的大小为函数沿该方向的方向导数或变化率. 按照这个定义,梯度概念与坐标系的选取无关.

Hamilton(哈密尔顿)引入符号向量

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

他称之为“Nabla”,利用符号向量梯度可记为:

$$\operatorname{grad}u = \nabla u.$$

梯度有运算规则(u, v 为数量场):

$$\nabla(u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v;$$

$$\nabla(u \cdot v) = v\nabla u + u\nabla v;$$

$$\nabla f(u) = f'(u)\nabla u.$$

给定一数量场 $u(x, y, z)$,若数量场在每一点梯度存在,则伴随一梯度场 $\operatorname{grad}u$. 若还有 $\operatorname{grad}u \neq 0$,则过区域每一点有且仅有一个等位面,任意两个等位面彼此不交,且数量场的等位面与向量场 $\operatorname{grad}u$ 的向量线互相正交.

6.3 向量场的流量与散度

在空间区域 D 上给定一向量场 $\boldsymbol{F}=(R, Q, R)$,在 D 内取一双侧曲面 S,设取定侧的单位法向量为:

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

则称曲面积分

$$\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过定向曲面 S 的**流量**. 若把上式写成向量形式

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

因向量场 $\boldsymbol{F}$ 和法向量 $\boldsymbol{n}$ 与坐标系选取无关,所以流量与坐标系的选取无关.

称数量 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 为向量场 $\boldsymbol{F}$ 的**散度**,记作

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

这时 Gauss 公式可写成向量形式:

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V. \qquad ①$$

为了克服散度定义依赖于坐标系的缺陷,我们在 M 点邻域作一闭曲面 S,其所围立体为 V(记号也表示其体积), $M\in V$. 对 Gauss 公式

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$$

中三重积分应用积分中值定理,然后让立体 V 收缩到一点 M,得 M 点散度为:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\lim_{V\to M}\frac{\displaystyle\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{V}.$$

 上式右端与坐标系选取无关,所以散度概念与坐标系选取无

关.

给定向量场 $\boldsymbol{F}$,可产生一数量场 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$. 若 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}\equiv 0$,则称 $\boldsymbol{F}$ 为**无源场**. 如 D 为三维空间除去 x 轴的区域, D 内任一同胚于球面的闭曲面都能在 D 内连续地收缩成 D 内一点,则称 D 为曲面单连通区域,向量场 $\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},\ r=|\boldsymbol{r}|)$的散度 $\mathrm{div}\,\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\equiv 0$,所以 $\boldsymbol{F}$ 是 D 内的无源场,这时 $\boldsymbol{F}$ 过 D 内任一闭曲面 S 的流量为零. 可以证明:若 D 是曲面单连通区域,则 $\boldsymbol{F}$ 过 D 内任一闭曲面 S 的流量为零的充要条件是: $\boldsymbol{F}$ 在 D 上的 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}\equiv 0$.

梯度形式上可记作 ∇ 与 $\boldsymbol{F}$ 数量积:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}.$$

若用 Δ 表示 Laplace 算子: $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$,则

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=\nabla\cdot(\nabla u)=(\nabla\cdot\nabla)u=\Delta u.$$

上式 ∇ 演算与向量演算规则一致,但有时并不一致,如

$$\nabla\cdot(u\boldsymbol{F})=\nabla u\cdot\boldsymbol{F}+u\nabla\cdot\boldsymbol{F}, \tag{②}$$

$$\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u(\nabla\times\boldsymbol{F}). \tag{③}$$

6.4 向量场的环量与旋度

在区域 D 上给定一向量场 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$, Γ 为 D 内一定向闭曲线,则称曲线积分

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿 Γ 的环量. 若把上式改写成向量形式

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},$$

可见,环量与坐标系的选取无关.

又称向量

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

为向量场 $\boldsymbol{F}$ 在一点的**旋度**,记作

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} \quad 或 \quad \nabla \times \boldsymbol{F}.$$

这时 Stokes 公式可写成向量形式,设闭路 Γ 所张的曲面 S 在 D 内,则

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{S} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S, \qquad ①$$

S 的定向如下确定. 在 Γ 上任取一点,记该点 Γ 的外法线方向为 $\boldsymbol{\tau}$, Γ 的切向量为 $\boldsymbol{t}$,则取 S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 使$(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{t})$成右手系.

为了克服旋度定义依赖于坐标系的缺陷,我们在 M 点任取一方向 $\boldsymbol{n}$,过 M 点以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量作一平面 π. 在 π 上围绕 M 点作一闭路 Γ, Γ 所围平面块记为 S,由 Stokes 公式得

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iint_{S} \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

令 S 在平面 π 上收缩到点 M,得

$$\mathrm{rot}_{n}\boldsymbol{F} = \mathrm{rot}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \lim_{S \to M} \frac{\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}}{S}.$$

记号 $\mathrm{rot}_{n}\boldsymbol{F}$ 表示向量 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 方向的投影. 上式说明旋度在任何方向上的投影与坐标系的选取无关,因而旋度与坐标系的选取无关.

给定向量场 $\boldsymbol{F}$,可产生一新的向量场 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$. 若 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{F}$ 是**无旋场**.

对梯度场可求散度和旋度,我们有

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u) = \nabla \times (\nabla u) = \boldsymbol{0},$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = \nabla \cdot (\nabla u) = \Delta u.$$

对旋度场可求散度和旋度,我们有

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0,$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - (\nabla \cdot \nabla)\boldsymbol{F}.$$

一向量场是否是旋度场问题,与向量场是无源场和流过任一闭曲面流量为零密切相关. 如 D 是全空间除去 x 轴,向量场 $\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$,它是 D 上无源场,流过 D 内任一闭曲面流量为零,且 $\boldsymbol{F}$ 是一旋度场,事实上向量场

$$\boldsymbol{G} = \frac{xz}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{j} - \frac{xy}{(y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\boldsymbol{k}$$

满足:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{G} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}(\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},\ r = |\boldsymbol{r}|).$$

若 D 是凸区域,可以证明 $\boldsymbol{F}$ 是旋度场的充要条件为 $\boldsymbol{F}$ 是无源场.

6.5 保守场与势函数

在区域 D 上给定一向量场 $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$,若沿 D 内任一闭路 Γ,向量场 $\boldsymbol{F}$ 的环量为零,则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为**保守场**.

若向量场 $\boldsymbol{F}$ 是某一数量场 u 的梯度场.

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}u,$$

则称 $\boldsymbol{F}$ 为**位势场**, u 就称为 $\boldsymbol{F}$ 的**势函数**.

$\boldsymbol{F}$ 是保守场的充要条件是: $\boldsymbol{F}$ 是位势场. 特别梯度场 $\mathrm{grad}u$ 是保守场.

若 D 是单连通区域,则 $\boldsymbol{F}$ 是保守场的充要条件为 $\boldsymbol{F}$ 是无旋场: $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\equiv 0$.

思考练习 解答下列问题:

1. 已知 $\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 除去原点区域上是保守场,试求出势函数 u. 并证明在此区域上不存在向量场 $\boldsymbol{G}$,使 $\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$.

2. 证明本章 6.3 节公式②,③.

3. 设 $u(x, y, z)\in C^{(2)}$, $f(x)\in C^{(2)}$,求 $\mathrm{divgrad}f(u)$.

4. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$,求 $\mathrm{grad}f(r)$, $f(t)\in C^{(2)}$.

5. $\boldsymbol{r}$, $f(r)$同上题,令 $\boldsymbol{F}=f(r)\boldsymbol{r}$.

(1) 证 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}\equiv 0$;

(2) $f(r)$是什么函数时, $\mathrm{div}\boldsymbol{F}\equiv 0$.

6. $\boldsymbol{C}$ 为常向量, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$, $f(r)$可微,求

(1) $\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{C}]$; (2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{C}]$;

(3) $\mathrm{div}[\boldsymbol{C}\times f(r)\boldsymbol{r}]$; (4) $\mathrm{rot}[\boldsymbol{C}\times f(r)\boldsymbol{r}]$.

7. 证明 (1) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=0$;

(2) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=0$;

(3) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\boldsymbol{F})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{F})-\Delta\boldsymbol{F}$.

8. 设 $f(x, y, z)$是一次齐次函数 $\boldsymbol{F}=\frac{1}{4}f(x, y, z)\boldsymbol{r}$,求证: $\mathrm{div}\boldsymbol{F}=f(x, y, z)$.

9. 物体 Ω 以一定的角速度 ω 绕轴

$$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

旋转,求物体上各点的速度,即求速度场 $\boldsymbol{v}$,然后再求 $\mathrm{rot}\boldsymbol{v}$.

10. 证明:向量场 $\boldsymbol{F}=yz(2x+y+z)\boldsymbol{i}+xz(x+2y+z)\boldsymbol{j}+xy(x+y+2z)\boldsymbol{k}$ 为保守场,并求势函数.

11. 已知引力场 $\boldsymbol{F}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$ 在空间除去 z 轴的区域上是向量场

$$\boldsymbol{G}=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}$$

的旋度: $\mathrm{rot}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}$. 试求出 P, Q.

§7 场论的应用

这节我们将考察场论在流体力学与电磁学中的应用,根据力学和电磁学中某些原理,推导出基本向量方程,目的在于说明场论方法的应用,而不在意所牵涉到原理的完全和深入解释.

7.1 在流体力学中的应用

设在空间某区域充满流动着的流体(如液体、气体),有两种方法来描述这一运动,一种是 Lagrange 方法,设 $t=0$ 时,流体质点的位置为(a, b, c),随后它的位置可表示为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(a, b, c, t)$. 另一种是 Euler 方法,即场的方法,它考察流体在所占区域上每点(x, y, z)和每一时刻 t,流体的速度 $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$、密度 $\delta(x, y, z, t)$、压力 $p(x, y, z, t)$等物理量. 我们采用后一方法,从基本物理定律出发,利用散度定理导出相应数学方程. 假设速度、密度、压力都是光滑函数,流体也是**理想流体**(即非粘性的、均匀的、各向同性的),如此性质的流体在实际中是不具备的,所以我们处理的是简化后的数学模型.

考虑想象中的闭曲面 S,它所围区域记作 D. 所谓"想象"中曲面 S,因为它不妨害或阻挡流体的流动,事实上只是把我们注意力集中于场的特殊部分. 我们设流体既不会凭空产生,也不会凭空消失,即既无源泉也无渗漏. 质量守恒定律告诉我们, D 内流体质量增加的速率等于通过 S 流入 D 内流体质量的速率.

在(x, y, z)点和时刻 t,体积元素 $\mathrm{d}V$ 的流体质量为 $\delta(x, y, z, t)\mathrm{d}V$,所以在时刻 t 时, D 内流体的质量为

$$\iiint_D \delta \mathrm{d}V,$$

质量增加的速率为:

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \delta \mathrm{d}V=\iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t}\mathrm{d}V.$$

来求流体在时刻 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 内流出面积元素 $\mathrm{d}S$ 的体积. 在 $\mathrm{d}S$ 上任取一点(x, y, z),曲面在该点的单位外法向量记作 $\boldsymbol{n}$,则所求体积为:

$$\boldsymbol{v}(x, y, z, t)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t,$$

所以流出 $\mathrm{d}S$ 的流体质量为

$$\delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S \mathrm{d}t,$$

因此在时刻 t,通过 S 流出 D 的流量的速率为

$$\oint\!\!\!\oint_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S,$$

根据质量守恒定律得

$$\iiint_D \frac{\partial \delta}{\partial t} \mathrm{d}V = -\oint\!\!\!\oint_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S.$$

应用散度定理(本章 6.3 节①式),得

$$\iiint_D \left[\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathrm{div}(\delta \boldsymbol{v})\right] \mathrm{d}V = 0,$$

由于区域 D 的任意性,故有

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \mathrm{div}(\delta \boldsymbol{v}) = 0. \qquad ①$$

称上述方程为**连续性方程**,它等价于质量守恒定律. 若流体是不可压缩的,即 δ 为常数,这时流体的连续性方程变为:

$$\mathrm{div} \boldsymbol{v} = 0.$$

流体运动遵从 Newton 第二定律: 流体任一部分动量变化的速率,等于作用这部分流体的外力之和. 由此出发可得流体的运动方程. 我们再回到区域 D 中流体, 时刻 t 时的动量为 $\iiint_D \delta \boldsymbol{v} \mathrm{d}V$, 动量变化的速率为

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\delta \boldsymbol{v}) \mathrm{d}V.$$

通过 S 流出 D 的流体动量变化的速率为

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{v}(\delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}) \mathrm{d}S.$$

上述两部分动量变化速率之和,应等于两项外力之和,一项是 D 外流体对 D 内流体的压力,设压力强度为 $p(x, y, z, t)$,因压力作用在 S 上,方向为 $-\boldsymbol{n}$,所以作用 D 内流体的这部分力为

$$-\oiint_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

我们用 $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ 表示力密度，即单位质量所受的力(如重力，电磁力等)，则 D 内流体所受力为

$$\iiint_D \delta\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V.$$

由 Newton 第二定律得

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t}(\delta\boldsymbol{v})\mathrm{d}V + \oiint_S \boldsymbol{v}(\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S = -\oiint_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S + \iiint_D \delta\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V. \quad ②$$

对曲面积分应用散度定理得

$$\oiint_S p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_D \nabla p\,\mathrm{d}V.$$

记 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{e}_1+v_2\boldsymbol{e}_2+v_3\boldsymbol{e}_3$，应用本章 6.3 节公式①和②，得

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{v}(\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S &= \sum_{i=1}^{3}\oiint_S v_i(\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}S\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\iiint_D \mathrm{div}(v_i\delta\boldsymbol{v})\mathrm{d}V\boldsymbol{e}_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\iiint_D [v_i\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{v}) + \delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla v_i]\mathrm{d}V\boldsymbol{e}_i \\ &= \iiint_D [\boldsymbol{v}\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{v}) + \delta(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}]\mathrm{d}V.\end{aligned}$$

这样由②推出

$$\iiint_D \left[\delta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\frac{\partial\delta}{\partial t} + \boldsymbol{v}\mathrm{div}(\delta\boldsymbol{v}) + \delta(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p - \delta\boldsymbol{F}\right]\mathrm{d}V = 0.$$

再利用连续性方程和 D 的任意性，得到

$$\delta\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + \delta(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\nabla p + \delta\boldsymbol{F},$$

称此方程为**流体的运动方程**，注意它不是未知函数 $\boldsymbol{v}$ 的线性偏微分方程.

7.2 在电磁场中的应用

已知稳定电荷分布产生电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$,稳定电流产生磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$. 则电荷为 q,速度为 $\boldsymbol{v}$ 的点电荷在 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 点所受到的电力为 $q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$,所受到的磁力为 $\mu_0 q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, μ_0 为物理常数,称为**导磁率**. 我们先考察稳定电场与磁场,然后再考察随时间变化电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$和磁场 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$之间的关系.

在空间 $\boldsymbol{s}=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k}$ 点放置电荷 q,则由 Coulomb 定律知它在 $\boldsymbol{r}$ 点的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3},$$

ε_0 为**介电常数**. 在单连通区域 $\mathbf{R}^3-\{\boldsymbol{s}\}$上存在势函数

$$\varphi(\boldsymbol{r})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|},\ \nabla\varphi=\boldsymbol{E},$$

所以 $\boldsymbol{E}$ 为保守场,且 $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0$. 在 $\mathbf{R}^3-\{\boldsymbol{s}\}$上有 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0$. 以 $\boldsymbol{s}$ 为心,以 δ 为半径作球面 S,则电场 $\boldsymbol{E}$ 通过球面 S 的电通量为

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oiint_S\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\cdot\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

应用散度定理,对任一包含 $\boldsymbol{s}$ 点的闭曲面 S,相应电通量亦为

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

若电荷以密度 $\rho(\boldsymbol{s})$连续分布在某一有界区域上,在 $\boldsymbol{s}$ 点取体积微元 $\mathrm{d}V$,把它视作点电荷 $\rho(\boldsymbol{s})\mathrm{d}V$,所以连续分布电荷所产生的电场为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\rho(\boldsymbol{s})\mathrm{d}V.$$

这里约定 $\rho(\boldsymbol{s})$在有界区域外为零. 上述反常积分是收敛的,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$在 $\mathbf{R}^3$ 上连续. 电场 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$有势函数

$$\varphi(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(\boldsymbol{s})\mathrm{d}V}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}$$

$$=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\frac{\rho(\xi,\ \eta,\ \zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}.$$

利用参变积分微分法可以证明

$$\nabla\varphi=\boldsymbol{E}\quad(\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3).$$

因保守场一定是无旋场,故有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0\quad(\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^3).$$

为求 $\boldsymbol{E}$ 的散度,考虑闭曲面 S,其所围区域记作 D,并注意到

$$\oiint\limits_{S}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\begin{cases}4\pi, & \boldsymbol{s}\in D^\circ,\\ 0, & \boldsymbol{s}\overline{\in}\overline{D},\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 S 的单位外法向量,求 $\boldsymbol{E}$ 通过曲面 S 的电通量

$$\oiint\limits_{S}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\rho(\boldsymbol{s})\oiint\limits_{S}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}V$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_{D}\rho(\boldsymbol{s})\mathrm{d}V,$$

这证明通过 S 的电通量,等于 S 所围区域内电荷除以 ε_0. 对上式应用散度定理,得

$$\iiint\limits_{D}\left(\mathrm{div}\boldsymbol{E}-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\mathrm{d}V=0,$$

由 D 的任意性,即得 Gauss 定律的微分形式:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

因 $\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi$,推出 φ 满足 Poisson 方程:

$$\Delta\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

特别在无电荷分布的空间区域上, φ 是调和函数.

讨论磁场的出发点是 Biot-Savart 定律. 设有稳定电流 I 沿曲线型导线 $\mathscr{T}$ 流动,取 $\boldsymbol{s}=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k}\in\mathscr{T}$ 点电流元素 $\mathrm{d}I=I\mathrm{d}\boldsymbol{s}$,则它在 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 点产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=\frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3},$$

这里 $d\boldsymbol{s}=\boldsymbol{\tau}ds$，$\boldsymbol{\tau}$ 是曲线 $\mathscr{F}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 点的单位切向量,方向与电流方向一致.

所以电流 I 沿闭曲线 $\mathscr{F}$ 流动在 $\boldsymbol{r}$ 点产生的磁场为:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}} \frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}.$$

考虑向量场

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}} \frac{d\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|},$$

因 $\nabla_r\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}$ 和本章 6.3 节公式③,得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} &= \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}}\nabla_r\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|}\right)\times d\boldsymbol{s}\\ &= \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}}\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3} = \boldsymbol{H},\end{aligned}$$

这说明 $\boldsymbol{H}$ 是旋度场,特别对 $\mathscr{F}$ 外的点有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0.$$

求 $\boldsymbol{H}$ 的旋度时,注意到下列事实. 设 $\boldsymbol{C}$ 为常向量，$\boldsymbol{F}$ 为可微向量,则

$$\nabla\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{F}) = (\nabla\cdot\boldsymbol{F})\boldsymbol{C}-(\boldsymbol{C}\cdot\nabla)\boldsymbol{F},$$

因此

$$\begin{aligned}\nabla_r\times\left(d\boldsymbol{s}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\right) &= -(d\boldsymbol{s}\cdot\nabla_r)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\\ &= (d\boldsymbol{s}\cdot\nabla_s)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3},\end{aligned}$$

其中 ∇_r，∇_s 分别表示对 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 求微分. 所以有

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H} &= \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}}\nabla_r\times\frac{d\boldsymbol{s}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3} = \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}}(d\boldsymbol{s}\cdot\nabla_s)\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\\ &= \frac{I}{4\pi}\oint_{\mathscr{F}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\right)d\xi+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\right)d\eta\\ &\quad+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\right)d\zeta\\ &= 0.\end{aligned}$$

这说明在 $\mathbf{R}^3$ 除去闭曲线 $\mathscr{F}$ 的区域上，有 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=0$. 由于该区域不是单连通，得不出 $\boldsymbol{H}$ 沿任一闭曲线的环量为零. 我们来求 $\boldsymbol{H}$ 沿图 20-16 中闭曲线 C 的环量. 由于 $\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=0$，应用 Stokes 公式知 $\boldsymbol{H}$ 沿 C 的环量与 C 的形状和大小无关，当 C 充分靠近导线 $\mathscr{F}$ 时，磁场 $\boldsymbol{H}$ 的贡献主要来自接近 C 的部分.

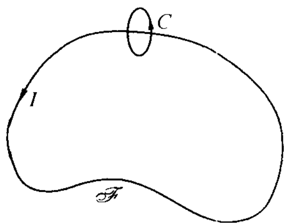


图 20-16

我们把问题简化成 $\mathscr{F}$ 为无限长直导线，取作 z 轴，电流 I 沿 $\boldsymbol{k}$ 方向流动，再取 C 是半径为 a，圆心在 z 轴的水平圆周，求 $\boldsymbol{H}$ 沿 C 的环量

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

先来求 $\boldsymbol{H}$，因 $\boldsymbol{s}=\zeta\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点的方向为 C 在 $\boldsymbol{r}$ 点切线方向：

$$\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}\right).$$

令 $x^2+y^2=a^2$，$\boldsymbol{H}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点大小为

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{H}| &= \frac{I}{4\pi}\int_{\mathscr{F}}\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{s}||\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|\sin\theta}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}|^3}\\
&= \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\theta\mathrm{d}s}{a^2+(\zeta-z)^2}\\
&= \frac{Ia}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\zeta}{[a^2+(\zeta-z)^2]^{\frac{3}{2}}}\\
&\quad (\text{令 } \zeta-z=a\tan\varphi)\\
&= \frac{I}{4\pi a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{I}{2\pi a},
\end{aligned}$$

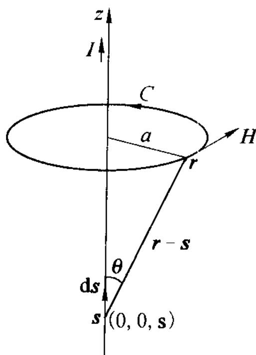


图 20-17

所以得

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}\right)$$

令

$$A(r) = -\frac{I}{4\pi}\ln(x^2+y^2)k,$$

则$\nabla \times A = H$,在 z 轴外有 $\operatorname{div}H=0$, $\operatorname{rot}H=0$. H 沿 C 的环量为:

$$\oint_C H \cdot \mathrm{d}r = \frac{I}{2\pi}\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{I}{2\pi a^2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = I.$$

这样我们证明了 Ampère 定律:磁场 H 沿闭曲线 C 的环量,等于穿过 C 所围曲面 S 的电流 I.

现考虑电流在空间一有界区域内流动,具有电流密度向量 $J(s)$,即每点 s 电流沿方向 $J(s)$流动,它在 r 点产生的磁场为:

$$H(r) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{J(s)\times(r-s)}{|r-s|^3}\mathrm{d}V,$$

这里约定 $J(s)$在有界区域外为零向量,在有界域上连续,所以上述重积分收敛, $H(r)$是 $\mathbf{R}^3$ 上连续向量场,令

$$A(r) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{\mathbf{R}^3}\frac{J(s)}{|r-s|}\mathrm{d}V,$$

可以证明$\nabla \times A = H$,由此可得在 $\mathbf{R}^3$ 上

$$\operatorname{div}H = \nabla \cdot (\nabla \times A) = 0.$$

求旋度时,注意流过具有单位法向量 n 的面积元素 $\mathrm{d}S$ 的电流为$J(s)\cdot n\mathrm{d}S$,设 S 的边界记作 C,其定向由 n 决定,则 H 沿 C 的环量为

$$\oint_C H \cdot \mathrm{d}r = \iint_S J \cdot n\mathrm{d}S,$$

应用 Stokes 公式得

$$\iint_S(\operatorname{rot}H - J)\cdot n\mathrm{d}S = 0,$$

由 S 的任意性,即得

$$\operatorname{rot}H = J.$$

7.3 Maxwell 方程组

对稳定电磁场我们得到四个方程:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}.$$

当 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 随时间变化时,方程需要作相应改变. 由于 Gauss 定律依然适用,所以方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 仍成立. 方程 $\operatorname{div}\boldsymbol{H}=0$ 也仍成立,这是因为没有磁源(S 极或 N 极),磁力线为闭曲线.

方程 $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 的改变,归功于 Hichael Faraday,他观察到电磁沿一闭曲线 C 的环量,对应于磁通量

$$\boldsymbol{\Phi} = \iint_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}S$$

变化,即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\mu_0}\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 S 是以 C 为边界的任一曲面, S 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 C 的定向成右手规则. 对线积分应用 Stokes 公式,得

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

$$= -\mu_0 \iint_S \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$$

由 S 的任意性,得 Faraday 定律的微分形式

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}.$$

只有当磁场不依赖于时间时,电场才是无旋场.

关于 Ampère 定律 $\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}$,当电场依赖于时间时,也要作相应改变. 这时电流密度向量 $\boldsymbol{J}$ 是时间函数,记 ρ 为电荷密度,由电荷守恒定律,类似于流体力学中讨论,可得连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{J}.$$

这说明 ρ 依赖于时间时, $\operatorname{div}\boldsymbol{J} \neq 0$,显然与 Ampère 定律矛盾,因任一旋度场的散度应为零. 为修正 Ampère 定律,注意到

$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\boldsymbol{E}$,得

$$-\operatorname{div}\boldsymbol{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

或

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) = 0.$$

这提示 Ampère 定律应修正为:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

是 Maxwell 首先发现磁场产生不仅依赖于电流,也依赖变化的电场.

综上所述,当空间区域存在电荷与电流,产生的电场与磁场受方程组

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

所制约. 它称作 **Maxwell 方程组**.

第二十一章 微分形式及其积分

这章要把 $\mathbf{R}^3$ 中的第二型曲线积分和曲面积分推广到 $\mathbf{R}^n$ 空间中去,定义 $k(\leqslant n)$维曲面上的第二型曲面积分,并导出 $\mathbf{R}^n$ 空间中一般的 Stokes 公式. 以前讲述的微积分基本定理, Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式都是它的一个特例.

§1 微分形式

在三元函数 $u=f(x, y, z)$的微分定义中,规定 $\mathrm{d}x=\Delta x$, $\mathrm{d}y=\Delta y$, $\mathrm{d}z=\Delta z$,所以函数微分可记作

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

现在换一种观点来解释 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$,把它们看成是 $\mathbf{R}^3$ 到 $\mathbf{R}$ 的线性函数,对 $\mathbf{R}^3$ 中任一向量 $\boldsymbol{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$,

$$\mathrm{d}x(\boldsymbol{h})=\Delta x,\ \mathrm{d}y(\boldsymbol{h})=\Delta y,\ \mathrm{d}z(\boldsymbol{h})=\Delta z.$$

其几何意义为定向线段在坐标轴上的投影. 如果对函数与函数值不加区分,也可说 $\mathrm{d}x=\Delta x$. 在新的解释下,微分 $\mathrm{d}u$ 是基本线性函数 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ 的线性组合.

在第二型曲面积分

$$\iint\limits_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

定义中, $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 表示定向面积在 Oxy 平面上的投影. 那时被积表达式并没有单独定义,现为了给被积表达式赋予独立的意义,我们定义函数

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R},$$

对任意的两向量

$$\boldsymbol{h}_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}), \boldsymbol{h}_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}),$$

其值为

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$$

行列式表示由向量 $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ 所决定的定向平行四边形在 Oxy 平面上投影的面积. 这里函数不采用记号 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,而用 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 来表示. 同样有

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = \begin{vmatrix} h_{12} & h_{13} \\ h_{22} & h_{23} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = \begin{vmatrix} h_{13} & h_{11} \\ h_{23} & h_{21} \end{vmatrix}.$$

其几何意义分别表示定向平行四边形在 Oyz 平面和 Ozx 平面上投影的面积. 类似有

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = \begin{vmatrix} h_{12} & h_{11} \\ h_{22} & h_{21} \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2) = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{11} \\ h_{21} & h_{21} \end{vmatrix}.$$

可见,函数 $\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x$ 与函数 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ 相差一符号:

$$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -(\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y);$$

函数 $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x \equiv 0$.

将上面的讨论推广到 $\mathbf{R}^n$ 空间,有下面定义.

定义 21.1 设 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 k 个不大于 n 的正整数,它们之间可以相同. $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ 是定义在 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n$ (k 个)上的一个数值函数,给定 $\mathbf{R}^n$ 中 k 个向量

$$\boldsymbol{h}_j = (h_{j1}, h_{j2}, \cdots, h_{jn}) \quad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

定义函数 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ 在点 $(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \cdots, \boldsymbol{h}_k)$ 之值为:

$$\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \cdots, \boldsymbol{h}_k)$$

$$=\begin{vmatrix} h_{1i_1} & h_{1i_2} & \cdots & h_{1i_k} \\ h_{2i_1} & h_{2i_2} & \cdots & h_{2i_k} \\ \cdots & & & \\ h_{ki_1} & h_{ki_2} & \cdots & h_{ki_k} \end{vmatrix}.$$

根据行列式的性质,易知函数 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 具有下列性质:

(1) $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 对每一 $\boldsymbol{h}_j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 都是线性的,例如它对 $\boldsymbol{h}_1$ 是线性的,即

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1+\boldsymbol{h}_1',\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)\\ =\ &\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)\\ &+\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1',\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k);\\ &\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\lambda\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)\\ =\ &\lambda\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k).\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 是反对称的,即 $(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)$ 中任意两个位置对调,函数值改变符号,如

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_2,\ \boldsymbol{h}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)\\ =\ &-\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k).\end{aligned}$$

由此推出,若 $(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)$ 中有两个向量相同,则函数值为零.

我们称 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 为基本反对称 k 重线性函数,一般地设 $\omega,\ \eta$ 是具有上述两个性质的反对称 k 重线性函数

$$\omega,\ \eta:\ \underbrace{\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n}_{k\ \text{个}}\to\mathbf{R},$$

它们之间可定义相加和数乘运算:

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)&=\omega(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)\\ &\quad+\eta(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k);\\ (\lambda\omega)(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k)&=\lambda\omega(\boldsymbol{h}_1,\ \boldsymbol{h}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{h}_k).\end{aligned}$$

显然,所有反对称 k 重线性函数构成一线性空间,记作 $\wedge^k$.

在 $\wedge^k\,(k\leqslant n)$ 中,形如 $\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\ (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k$

$\leqslant n$)的基本反对称 k 重线性函数组成一极大线性无关组,其个数为 C_n^k 个.事实上,若有 C_n^k 个常数 $\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k}$,使得

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} \equiv 0,$$

必有 $\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k}=0$. 这是因为

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k} (\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_k})$$

$$=\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} = 0,$$

其中 $\boldsymbol{e}_i(1\leqslant i\leqslant n)$为 $\mathbf{R}^n$ 中标准正交基向量.

反之,若 ω 是 $\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n$($k$ 个)上某一反对称 k 重线性函数,则 ω 一定可表示为:

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k},$$

其中 $\lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} = \omega(\boldsymbol{e}_{i_1}, \boldsymbol{e}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_k})$. 我们以 $n=3$, $k=2$ 为例来说明,由 ω 的反对称性和 2 重线性性质,易得

$$\begin{aligned} &\omega(h_{11}\boldsymbol{e}_1 + h_{12}\boldsymbol{e}_2 + h_{13}\boldsymbol{e}_3,\ h_{21}\boldsymbol{e}_1 + h_{22}\boldsymbol{e}_2 + h_{23}\boldsymbol{e}_3) \\ &= \omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} + \omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3) \begin{vmatrix} h_{11} & h_{13} \\ h_{21} & h_{23} \end{vmatrix} \\ &\quad + \omega(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) \begin{vmatrix} h_{12} & h_{13} \\ h_{22} & h_{23} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \omega = {} & \omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \omega(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ & + \omega(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$

如果数组 $(j_1, j_2, \cdots, j_k)$是由数组 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$经 $[j_1, j_2, \cdots, j_k]$次置换得到,则

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \mathrm{d}x_{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_k} \\ &= (-1)^{[j_1, j_2, \cdots, j_k]} \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}. \end{aligned}$$

如 $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_k}$ 中任意两个 $\mathrm{d}x_{i_l}$ 位置对调,所得函数差

一符号,例如将 dx_{i_1}, dx_{i_2} 对调,则

$$dx_{i_2} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = - dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

下面我们定义外积(或 Wedge 积)运算,使两个反对称重线性函数的积仍为反对称重线性函数.

定义 21.2 外积运算 $\wedge$ 是 $\wedge^k \times \wedge^l$ 到 $\wedge^{k+l}$ 的映射,其定义为:

$$(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \wedge (dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l})$$
$$= dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

一般地,设

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \lambda_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \in \wedge^k,$$

$$\eta = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_l \leqslant n} \mu_{j_1 j_2 \cdots j_l} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l} \in \wedge^l,$$

则定义

$$\omega \wedge \eta = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n \\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_l \leqslant n}} \lambda_{i_1 \cdots i_k} \mu_{j_1 \cdots j_l} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

根据定义,外积运算具有下列性质:

(1) 设 ω_1, $\omega_2 \in \wedge^k$, $\eta \in \wedge^l$,则有分配律

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta.$$

(2) 设 $\omega \in \wedge^k$, $\eta \in \wedge^l$, $\xi \in \wedge^r$,则有结合律

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \xi = \omega \wedge (\eta \wedge \xi).$$

(3) 设 $\omega \in \wedge^k$, $\eta \in \wedge^l$,则

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

我们只证性质(3). 事实上,只须对 $\omega = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $\eta = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ 加以证明. 在

$$\omega \wedge \eta = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}.$$

中对 dx_{j_1} 作 k 次置换,得

$$dx_{j_1} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$$

依次对 dx_{j_1}, $\cdots$, dx_{i_l} 作 k 次置换,故作 kl 次置换后,可得

$$dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_e} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = \eta \wedge \omega,$$

因此有

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

有了外积定义,原作为整体函数记号的 $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$,现可理解成 k 个 $\wedge^1$ 的函数经 $(k-1)$ 次外积运算而得的反对称 k 重线性函数,如果 $\omega \in \wedge^k$, $\eta \in \wedge^l$, $k+l>n$,约定 $\omega \wedge \eta \equiv 0$.

利用反对称 k 重线性函数来定义 k 次微分形式.

定义 21.3 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集,定义

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leqslant i_1, \cdots, i_k \leqslant n} b_{i_1 \cdots i_k}(\boldsymbol{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

$(\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \Omega)$ 为 Ω 内的 **k 次微分形式**,其中 $1 \leqslant k \leqslant n$, $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 k 个不大于 n 的正整数, $b_{i_1 i_2 \cdots i_k}(\boldsymbol{x})$ 是定义在 Ω 内的实值函数.

k 次微分形式也简称为 k 次形式,且记作 ω. 为统一起见, Ω 上的实值函数称为 0 次形式. 若 $k>n$,这时 k 次形式恒为零.

由反对称 k 重线性函数的性质,易知 k 次形式具有下列性质:

(1) 任一 k 次形式总可写成

$$\omega(\boldsymbol{x}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} a_{i_1 i_2 \cdots i_k}(\boldsymbol{x}) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

称此形式为 ω 的标准形式. 若 $a_{i_1 \cdots i_k}(\boldsymbol{x}) \in C^{(r)}(\Omega)$,则记 $\omega \in C_k^{(r)}(\Omega)$.

例如,二次形式

$$\begin{aligned}\omega = {} & x dx \wedge dy + y dy \wedge dx + x dx \wedge dz + z dz \wedge dx \\ & + y dy \wedge dz + z dz \wedge dy + x^2 dx \wedge dx \\ & + y^2 dy \wedge dy + z^2 dz \wedge dz,\end{aligned}$$

它的标准形式为

$$\begin{aligned}\omega = {} & (x-y) dx \wedge dy + (x-z) dx \wedge dz \\ & + (y-z) dy \wedge dz \in C_2^{(\infty)}(\mathbf{R}^3).\end{aligned}$$

(2) 若 $\omega, \eta \in C_k^{(r)}(\Omega)$,则

$$\omega + \eta = \eta + \omega \in C_k^{(r)}(\Omega).$$

$$\lambda(\omega+\eta)=\lambda\omega+\lambda\eta\in C_k^{(r)}(\Omega)(\lambda\text{ 为实函数且 }\lambda\in C^{(r)}(\Omega)).$$

(3) 若 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)$，$\eta\in C_l^{(r)}(\Omega)$，则 $\omega\wedge\eta\in C_{k+l}^{(r)}(\Omega)$，且

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega.$$

特别有 $C_0^{(r)}(\Omega)=C^{(r)}(\Omega)$，$C_k^{(r)}(\Omega)=\{0\}(k>n)$.

思考练习　解答下列问题：

1. 设 $\omega=dx_1\wedge dx_2+dx_3\wedge dx_4\in\wedge^2$，(1) 求 $\omega\wedge\omega$；(2) 求证不存在两个 α，$\beta\in\wedge^1$，使 $\alpha\wedge\beta=\omega$.

2. 设 dx_1，dx_2，dx_3，dx_4 为 $\wedge^1$ 的基，$\omega_j=\sum_{i=1}^{4}a_{ij}dx_i(1\leqslant j\leqslant 4)$，$a_{ij}$ 为实数，则

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\omega_3\wedge\omega_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3\wedge dx_4.$$

§2　外　微　分

设 $f(x,y,z)\in C_0^{(1)}(\Omega)$，则它的微分

$$df=f_x dx+f_y dy+f_z dz\in C_1^{(0)}(\Omega).$$

说明零次形式的微分为一次形式. 现在也把微分称为外微分，一般 k 次形式的外微分定义如下：

定义 21.4　设 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)(r\geqslant 1,\ 0\leqslant k\leqslant n)$，其形式为

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$

我们称 $(k+1)$ 次形式

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx_j\right)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

为 ω 的**外微分**,记作 $\mathrm{d}\omega\in C_{k+1}^{(r-1)}(\Omega)$.

若 $\omega\in C_n^{(r)}(\Omega)(r\geqslant 1)$,则 $\mathrm{d}\omega=0$.

例 1 若 $\omega=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\in C_1^{(1)}(\Omega)$,求外微分 $\mathrm{d}\omega$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\wedge \mathrm{d}y\\ &= \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例 2 若 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z\in C_1^{(1)}(\Omega)$,求其外微分 $\mathrm{d}\omega$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x\\ &\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y\\ &\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z\\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x\\ &\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

例 3 若 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\in C_2^{(1)}(\Omega)$,求其外微分 $\mathrm{d}\omega$.

解
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z\\ &\quad+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x\\ &\quad+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\wedge \mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

外微分运算具有下列性质:

(1) 设 $\omega_1, \omega_2 \in C_k^{(r)}(\Omega)(r\geqslant 1)$,则

$$d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2 \in C_{k+1}^{(r-1)}(\Omega);$$

(2) 设 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)$, $\eta\in C_l^{(r)}(\Omega)(r\geqslant 1)$,则

$$d(\omega\wedge\eta)=(d\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(d\eta)\in C_{k+l+1}^{(r-1)}(\Omega);$$

证明 只须对

$$\omega=a(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k},$$
$$\eta=b(\boldsymbol{x})dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$$

情况作证明,因

$$\omega\wedge\eta=a(\boldsymbol{x})b(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l},$$

所以

$$\begin{aligned}
d(\omega\wedge\eta)&=\sum_{s=1}^n\left(b(\boldsymbol{x})\frac{\partial a(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}+a(\boldsymbol{x})\frac{\partial b(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}\right)dx_s\wedge dx_{i_1}\wedge\\
&\quad\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\\
&=\left(\sum_{s=1}^n\frac{\partial a(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}dx_s\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\wedge\\
&\quad(b(\boldsymbol{x})dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l})\\
&\quad+\sum_{s=1}^n a(\boldsymbol{x})\frac{\partial b(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}dx_s\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge\\
&\quad dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\\
&=\left(\sum_{s=1}^n\frac{\partial a(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}dx_s\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)\wedge\\
&\quad(b(\boldsymbol{x})dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l})\\
&\quad+(-1)^k(a(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k})\wedge\\
&\quad\left(\sum_{s=1}^n\frac{\partial b(\boldsymbol{x})}{\partial x_s}dx_s\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\right)\\
&=(d\omega)\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge(d\eta).
\end{aligned}$$

(3) 设 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)(r\geqslant 2)$,则 $d(d\omega)=d^2\omega=0$.

证明 先设 $\omega=a(\boldsymbol{x})\in C_0^{(r)}(\Omega)$,则

$$d(da)=\sum_{p=1}^n d\left(\frac{\partial a}{\partial x_p}\right)\wedge dx_p=\sum_{p=1}^n\left(\sum_{q=1}^n\frac{\partial^2 a}{\partial x_q\partial x_p}dx_q\right)\wedge dx_p$$

$$= \sum_{p<q} \frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} dx_q \wedge dx_p + \sum_{p>q} \frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} dx_q \wedge dx_p$$

$$= \sum_{q<p} \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_q \partial x_p} \right] dx_q \wedge dx_p = 0.$$

这是因为 $a(\boldsymbol{x})$的二阶偏导数与求偏导的次序无关. 对一般 $\omega \in C_k^{(r)}(\Omega)$, 只须对 $\omega = a(\boldsymbol{x}) dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ 情形加以证明. 由外微分定义得

$$d\omega = (da) \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}),$$

再由性质 2 得

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d^2 a \wedge (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &\quad + (-1) da \wedge d(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

定义 21.5 设 $\omega \in C_k^{(r)}(\Omega)(k \geqslant 1)$,

(1) 若 $r \geqslant 1$, 且 $d\omega = 0$, 则称 ω 为**闭微分形式**;

(2) 若 $r \geqslant 0$, 且存在 $\eta \in C_{k-1}^{(r+1)}(\Omega)$, 使 $d\eta = \omega$, 则称 ω 为**恰当形式或正合形式**.

从性质(3)知, 若 ω 是恰当形式, 则 ω 是闭形式, 事实上

$$d\omega = d(d\eta) = d^2\eta = 0.$$

反之, 闭形式不一定是恰当形式. 例如, 在 $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0.0)\}$ 上定义的一次形式

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

是闭形式: $d\omega = 0$. 但在 Ω 内不存在 $\eta \in C_0^{(r+1)}(\Omega)$, 使 $d\eta = \omega$. 如果取 Ω 为右半平面区域, 则存在 0 次形式

$$\eta = \arctan \frac{y}{x} \in C_0^{(r+1)}(\Omega),$$

使 $d\eta = \omega$, 故 ω 是恰当形式. 可见, 闭形式是否为恰当形式与区域 Ω 的性质有关.

定理 21.1 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是以原点 O 为中心的星形区域(即任一 $\boldsymbol{x} \in \Omega$, 线段 $\overline{O\boldsymbol{x}} \subset \Omega$), 则在 Ω 上定义的 k 次闭形式 $\omega \in C_k^{(r)}(\Omega)(r \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$是恰当的.

证明 对每一 $l(1\leqslant l\leqslant n)$,我们引入一个映射如下:

$$I:C_l^{(r)}(\Omega)\to C_{l-1}^{(r)}(\Omega),$$

若 $\omega=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n}b_{i_1\cdots i_l}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_l}$,

$$I(\omega)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_l\leqslant n}\Big[\sum_{p=1}^{l}(-1)^{p-1}\Big(\int_0^1 t^{l-1}b_{i_1\cdots i_l}(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\Big)x_{i_p}$$

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_l}\Big],$$

其中 $\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}$ 表示去掉这一因子 $\mathrm{d}x_{i_p}$. 由于 Ω 是星形区域, $I(\omega)$ 表达式中的积分是有意义的.

映射 I 具有性质:

(1) $I(0)=0$;

(2) $I(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2)=\lambda_1 I(\omega_1)+\lambda_2 I(\omega_2)$,其中 λ_1, λ_2 为实数, ω_1, $\omega_2\in C_l^{(r)}(\Omega)$.

下面我们来证明对于任一 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)$,都有

$$\omega=I(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}(I(\omega)).$$

由于映射 I 和外微分运算 d 都具有线性性质,不妨设

$$\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}.$$

这时有

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{j=1}^{n}D_j a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

其中 $D_j a(\boldsymbol{x})$表示 $a(\boldsymbol{x})$对第 j 个变量求偏导数,因而有

$$I(\mathrm{d}\omega)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_0^1 t^k D_j a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\Big)x_j\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{k}(-1)^p\Big[\Big(\int_0^1 t^k D_j a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\Big)x_{i_p}$$

$$\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\Big]$$

另一方面,由

$$I(\omega)=\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\Big(\int_0^1 t^{k-1}a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\Big)x_{i_p}$$

$$\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$

因而有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I(\omega)=&\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\\&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\&+\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\right)x_{i_p}\right.\\&\left.\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\right].\end{aligned}$$

于是我们得到

$$\begin{aligned}I(\mathrm{d}\omega)+\mathrm{d}(I(\omega))=&\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(t\boldsymbol{x})x_j\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\&+\sum_{p=1}^{k}(-1)^{p-1}\left(\int_0^1 t^{k-1}a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{i_p}\wedge\\&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}x_{i_p}}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\=&\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^kD_ja(t\boldsymbol{x})x_j\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\&+k\left(\int_0^1 t^{k-1}a(t\boldsymbol{x})\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\=&\int_0^1\left[kt^{k-1}a(t\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{n}t^kD_ja(t\boldsymbol{x})x_j\right]\mathrm{d}t\\&\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\=&\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^ka(t\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}\\=&a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}=\omega.\end{aligned}$$

如果 ω 是闭形式,即 $\mathrm{d}\omega=0$,则得到

$$\mathrm{d}(I(\omega))=\omega.$$

令 $\eta=I(\omega)\in C_{k-1}^{(r)}(\Omega)$,就有 $d\eta=\omega$ 证毕.

定理中若 Ω 是关于某点 M 的星形区域,则定理仍成立. 特别任一闭形式,局部一定是恰当形式.

思考练习 解答下列问题：

1. 设 $\omega = yz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \in C_2^{(\infty)}(\mathbf{R}^3)$，

(1) 证明 ω 是闭形式；

(2) 求一次形式 η,使 $\mathrm{d}\eta=\omega$.

2. $\omega = \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

证明 ω 在 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上是闭形式. 考虑一次形式

$$\eta = \frac{z}{r}\,\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

验证 $\mathrm{d}\eta=\omega$,问 ω 在 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$上是否是恰当形式，$\omega$ 在什么样区域上是恰当形式.

3. 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 是曲面单连通区域，$\omega\in C_2^{(2)}(\Omega)$，$S$ 为 Ω 中任一封闭曲面,证明曲面积分

$$\iint_S \omega$$

为零的充要条件是 ω 为闭形式.

§3 微分形式的拉回

设向量函数 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$将 $D\subset\mathbf{R}^m$ 映入 $\Omega\subset\mathbf{R}^n(m\leqslant n)$,其中 D 为 $\mathbf{R}^m$ 中区域, Ω 可以是 $\mathbf{R}^n$ 中区域或点集. 映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$：$D\to\Omega$ 写成分量形式为：

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \cdots, u_m) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

记号

$$\omega = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k} \in C_k^{(r)}(\Omega)$$

$(k\leqslant m,\ r\geqslant 0)$表示函数 $a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{x})$在包含 Ω 的某一区域(若 Ω 是区域,该包含域就可取作 Ω)上属于 $C^{(r)}$ 类.

定义 21.6 给定映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$：$D\subset\mathbf{R}^m\to\Omega\subset\mathbf{R}^n(m\leqslant n)$，且$\boldsymbol{\varphi}\in C^{(r+1)}(D)(r\geqslant 0)$,又 $k\leqslant m$. 则称微分形式

$$\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}a_{i_1\cdots i_k}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\left(\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\mathrm{d}u_{j_1}\right)\wedge$$

$$\cdots\wedge\left(\sum_{j_k=1}^{n}\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}\mathrm{d}u_{j_k}\right)\in C_k^{(r)}(D)$$

是 ω 经 φ 的**拉回**.

由定义可证拉回映射 $\boldsymbol{\varphi}^{*}: C_k^{(r)}(\Omega)\to C_k^{(r)}(D)$ 具有下列性质:

(1) 设 $\omega_1, \omega_2\in C_k^{(r)}(\Omega)$,则有

$$\boldsymbol{\varphi}^{*}(\omega_1+\omega_2)=\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega_1+\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega_2.$$

由此性质,讨论一般微分形式 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)$ 的拉回,只需讨论单项 $\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$ 的拉回.

(2) 设 $\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}(k\leqslant m)$,则

$$\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\sum_{1\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant m}\frac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_{s_1},\cdots,u_{s_k})}\mathrm{d}u_{s_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{s_k}.$$

证明 依定义有

$$\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\left(\sum_{j_1=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\mathrm{d}u_{j_1}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\sum_{j_k=1}^{m}\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}\mathrm{d}u_{j_k}\right)$$

$$=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\sum_{j_1,\cdots,j_k=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}}\cdots\frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}\mathrm{d}u_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_{j_k}.$$

上式右端的求和,是对指标 $j_1,\cdots,j_k$ 各自独立地取 1 至 m 的值,所以和式中共有 m^k 项,但是由微分形式性质知 $j_1,\cdots,j_k$ 中只要有两个取值一样: $j_\alpha=j_\beta(\alpha\neq\beta)$,则它所对应的项必为零. 实际上只有 $j_1,\cdots,j_k$ 取互不相同的值时,它对应的项才保留下来.

任意取定一个数组 $(s_1,\cdots,s_k)$,满足 $1\leqslant s_1<\cdots<s_k\leqslant m$. 所有互不相同的数组成的数组 $(j_1,\cdots,j_k)(1\leqslant j_1,\cdots,j_k\leqslant m)$,经置换后变为 $(s_1,\cdots,s_k)$ 的数组共有 $k!$ 个,这个数目恰好是行列式 $\dfrac{\partial(x_{i_1},\cdots,x_{i_k})}{\partial(u_{s_1},\cdots,u_{s_k})}$ 的项数. 记数组 $(j_1,\cdots,j_k)$ 变为

数组$(s_1, \cdots, s_k)$的置换数为$[j_1, \cdots, j_k]$,则有

$$du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_k} = (-1)^{[j_1, \cdots, j_k]} du_{s_1} \wedge \cdots \wedge du_{s_k},$$

因此,这$k!$个数组$(j_1, \cdots, j_k)$对应的项之和为:

$$\left(\sum_{(j_1, \cdots, j_k)} (-1)^{[j_1, \cdots, j_k]} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_k}}{\partial u_{j_k}}\right) du_{s_1} \wedge \cdots \wedge du_{s_k}$$

$$= \frac{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(u_{s_1}, \cdots, u_{s_k})} du_{s_1} \wedge \cdots \wedge du_{s_k}.$$

(又满足$1 \leqslant s_1 < \cdots < s_k \leqslant m$的数组$(s_1, \cdots, s_k)$共有$C_m^k$个,所以单项$\omega$的拉回共有$C_m^k$项:

$$\boldsymbol{\varphi}^* \omega = a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})) \sum_{1 \leqslant s_1 < \cdots < s_k \leqslant m} \frac{\partial(x_{i_1}, \cdots, x_{i_k})}{\partial(u_{s_1}, \cdots, u_{s_k})} du_{s_1} \wedge \cdots \wedge du_{s_k}.$$

例如D, Ω为空间区域,映射

$$\boldsymbol{\varphi}: \begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \quad D \to \Omega \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$$

为同胚映射,且$\boldsymbol{\varphi} \in C^{(1)}(\overline{D})$. 在$\Omega$上给定三次微分形式$\omega = f(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$, $f \in C(\overline{\Omega})$. 则$\omega$经$\boldsymbol{\varphi}$的拉回为:

$$\boldsymbol{\varphi}^* \omega = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \wedge dv \wedge dw.$$

又如$D \subset \mathbf{R}^2$为区域, $S \subset \mathbf{R}^3$为光滑曲面,映射

$$\boldsymbol{\varphi}: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \quad D \to S \\ z = z(u, v), \end{cases}$$

为同胚映射,且$\boldsymbol{\varphi} \in C^{(1)}(\overline{D})$. 在$S$上给定二次微分形式$\omega = P(x, y, z) dy \wedge dz + Q(x, y, z) dz \wedge dx + R(x, y, z) dx \wedge dy \in C_2^{(0)}(S)$,则$\omega$经$\boldsymbol{\varphi}$的拉回为:

$$\boldsymbol{\varphi}^* \omega = \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right] du \wedge dv.$$

(3) 设$\omega \in C_k^{(r)}(\Omega)$, $\eta \in C_l^{(r)}(\Omega) (k + l \leqslant m)$,则

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\omega\wedge\eta)=\boldsymbol{\varphi}^*\omega\wedge\boldsymbol{\varphi}^*\eta.$$

证明 不妨设

$$\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k},$$
$$\eta=b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{j_l}.$$

则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^*(\omega\wedge\eta)&=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))b(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k}\wedge\\&\quad\mathrm{d}\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{j_l}\\&=(a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k})\wedge\\&\quad(b(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{j_l})\\&=\boldsymbol{\varphi}^*\omega\wedge\boldsymbol{\varphi}^*\eta.\end{aligned}$$

(4) 设映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})\in C^{(r+1)}(D)$，$\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)(r\geqslant1)$，则

$$\boldsymbol{\varphi}^*(\mathrm{d}\omega)=\mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi}^*\omega).$$

证明 先看 $k=0$ 情形. 设 $\omega=f(\boldsymbol{x})=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^{(r)}(\Omega)$，则

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j,$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^*(\mathrm{d}\omega)&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]}{\partial x_j}\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial x_j}{\partial \boldsymbol{u}_s}\mathrm{d}\boldsymbol{u}_s\\&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \boldsymbol{u}_s}\mathrm{d}\boldsymbol{u}_s\\&=\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]}{\partial \boldsymbol{u}_s}\mathrm{d}\boldsymbol{u}_s=\mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi}^*\omega).\end{aligned}$$

它反映的就是一阶微分形式的不变性.

其次设 $\omega=a(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_k}$，和 0 次微分形式的拉回即函数的复合，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}^*\omega&=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}\varphi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\varphi_{i_k}\\&=a(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}))\mathrm{d}(x_{i_1}\circ\boldsymbol{\varphi})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(x_{i_k}\circ\boldsymbol{\varphi})\\&=\boldsymbol{\varphi}^*a\wedge\mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi}^*x_{i_1})\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}(\boldsymbol{\varphi}^*x_{i_k}),\end{aligned}$$

 由外微分性质(ⅱ)得

$$d(\boldsymbol{\varphi}^* \omega) = d(\boldsymbol{\varphi}^* a) \wedge [d(\boldsymbol{\varphi}^* x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\boldsymbol{\varphi}^* x_{i_k})] + \boldsymbol{\varphi}^* a \wedge d[d(\boldsymbol{\varphi}^* x_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(\boldsymbol{\varphi}^* x_{i_k})],$$

再由二阶外微分为零和上面已证结果得

$$d(\boldsymbol{\varphi}^* \omega) = \boldsymbol{\varphi}^* (da) \wedge [\boldsymbol{\varphi}^* dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{\varphi}^* dx_{i_k}] = \boldsymbol{\varphi}^* [da \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}] = \boldsymbol{\varphi}^* (d\omega).$$

(5) 设给定映射 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\psi}(t)$：$G\subset \mathbf{R}^l \to D\subset \mathbf{R}^m$，$\boldsymbol{\psi}\in C^{(r+1)}(G)$，和映射 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$：$D\to \Omega\subset \mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{\varphi}\in C^{(r+1)}(D)(l\leqslant m\leqslant n)$. 又 $\omega\in C_k^{(r)}(\Omega)(k\leqslant l)$，则

$$(\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})^* \omega = \boldsymbol{\psi}^* (\boldsymbol{\varphi}^* \omega).$$

证明 设 $\omega=a(\boldsymbol{x})dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$，由

$$\boldsymbol{\varphi}^* \omega = (a\circ\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{u}) d(x_{i_1}\circ\boldsymbol{\varphi}) \wedge \cdots \wedge d(x_{i_k}\circ\boldsymbol{\varphi}),$$

所以

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\psi}^* (\boldsymbol{\varphi}^* \omega) \\
&= [(a\circ\boldsymbol{\varphi})\circ\boldsymbol{\psi}](t) d[(x_{i_1}\circ\boldsymbol{\varphi})\circ\boldsymbol{\psi}] \wedge \cdots \wedge d[(x_{i_k}\circ\boldsymbol{\varphi})\circ\boldsymbol{\psi}] \\
&= [a\circ(\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})](t) d[x_{i_1}\circ(\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})] \wedge \cdots \wedge d[x_{i_k}\circ(\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})] \\
&= (\boldsymbol{\varphi}\circ\boldsymbol{\psi})^* \omega.
\end{aligned}$$

我们已知重积分换元公式，设 D, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为区域，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$：$D\to\Omega$ 为同胚变换，且 $\boldsymbol{\varphi}\in C^{(1)}(\bar{D})$，函数 $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 Ω 上可积，则有 n 重积分换元公式：

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega}\cdots\int f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \iint_{D}\cdots\int (f\circ\boldsymbol{\varphi})(u_1, u_2, \cdots, u_n) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \cdots, u_n)} \right| du_1 du_2 \cdots du_n.
\end{aligned}$$

现在要把它改变为微分形式的积分换元公式.

设 $[\boldsymbol{O}; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$ 表示空间 $\mathbf{R}^n$ 的正交规范基. 任取一点 $\boldsymbol{P}_0\in\Omega$，并作正交规范基 $[\boldsymbol{P}_0; \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n]$，设

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n \end{bmatrix} = \underset{n\times n}{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_n \end{bmatrix},$$

若 $\det\boldsymbol{A}>0$，则称 Ω 取定正定向；若 $\det\boldsymbol{A}<0$，则称 Ω 取定负定向. 注意区

域 Ω 定向规定与 $\boldsymbol{P}_0$ 点取法无关.事实上设 $\boldsymbol{P}_0'\in\Omega$,让动点由 $\boldsymbol{P}_0$ 沿 Ω 内曲线 Γ 运行至 $\boldsymbol{P}_0'$,同时让标架 $[\boldsymbol{P}_0;\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n]$ 连续地变动得标架 $[\boldsymbol{P}_0';\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n']$,设

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1'\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2'\\ \vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'\end{bmatrix}=\underset{n\times n}{\boldsymbol{A}'}\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix},$$

则行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 与 $\det\boldsymbol{A}'$ 同号.

定义 21.7 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为定向区域,$\omega=f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\in C_n^{(0)}(\Omega)$,定义

$$\int_\Omega\omega=\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\pm\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

若 Ω 取定正定向,上式右端取"+"号;若 Ω 取的是负定向,上式右端取"−"号,上式右端 Ω 理解成有界可测集.

重积分换元公式 设 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$: $D\subset\mathbf{R}^n\to\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为同胚变换,$\boldsymbol{\varphi}\in C^{(1)}(\overline{D})$,且取定 D 的定向. $\omega\in C_n^{(0)}(\overline{\Omega})$,则

$$\int_\Omega\omega=\int_D\boldsymbol{\varphi}^*\omega.$$

证明 无妨设 D 取定的是正向.若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$ 把正定向区域 D 映为正定向区域 Ω,则雅可比行列式

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}\geqslant 0.$$

由定义可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega\omega&=\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=\int_\Omega f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_D f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]\,|J(\boldsymbol{u})|\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=\int_D f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]J(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=\int_D f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_n=\int_D\boldsymbol{\varphi}^*\omega.\end{aligned}$$

若 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})$把正定向区域 D 映为负定向区域Ω,则

$$J(\boldsymbol{u})=\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\leqslant 0,$$

由定义可得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\omega&=\int_{\Omega}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n=-\int_{\Omega}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=-\int_{D}f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]\mid J(\boldsymbol{u})\mid\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=\int_{D}f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]J(\boldsymbol{u})\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\&=\int_{D}f[\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u})]\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_n\\&=\int_{D}\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega.\end{aligned}$$

证毕.

思考练习 解答下列问题:

1. 设 D,Ω 为空间区域,映射

$$\boldsymbol{\varphi}\begin{cases}x=x(u,v,w),\\y=y(u,v,w),\quad D\to\Omega\\z=z(u,v,w),\end{cases}$$

为同胚映射,且 $\boldsymbol{\varphi}\in C^{(1)}(D)$在 Ω 上给定二次微分形式 $\omega=P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,求 $\boldsymbol{\varphi}^{*}\omega$.

2. D,Ω 映射 $\boldsymbol{\varphi}$ 同上题, $\boldsymbol{\varphi}$ 把光滑定向曲面 $S\subset D$ 映为 $\boldsymbol{\varphi}(S)$. 试给出第二型曲面积分

$$\iint_{\boldsymbol{\varphi}(S)}P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

的变换公式.

3. 设 B: $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1$. ∂B: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. 证明:不存在函数 g 满足: $g|_{\partial B}=id_{\partial B}$; g: $B\to\partial B$ 且 $g\in C^{(2)}(B)$.

(提示:设 $g=(g_1,g_2,g_3)$,考虑二次微分形式

$$\omega=g_1\mathrm{d}g_2\wedge\mathrm{d}g_3)$$

4. 设简单闭曲线 L 包含坐标原点，又设 $\xi=\varphi(x, y)$，$\eta=\psi(x, y)$ 属于 $C^{(2)}$ 类. 曲线 $\varphi(x, y)=0$，$\psi(x, y)=0$ 在 L 所围区域 D 内有 n 个交点 $M_i(x_i, y_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，且 $\left.\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}\right|_{M_i}\neq 0$. 证明：

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_L \frac{\varphi \mathrm{d}\psi-\psi \mathrm{d}\varphi}{\varphi^2+\psi^2}=\sum_{i=1}^n \operatorname{sign}\left[\left.\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right|_{M_i}\right].$$

其中 L 取逆时针走向，且不含 $\varphi=0$，$\psi=0$ 的交点.

§4 微分流形

空间中球面可用一个参数方程表示，但这表示式不是一一对应的. 非一一对应映射可以把双侧曲面映为单侧曲面. 所以研究曲面时，映射一一对应是基本的要求. 这样一曲面须用几个一一对应的参数方程来表示，或局部可用一一对应的参数方程来表示，这就引出了流形的概念.

设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 中子集，称 $\mathbf{R}^n$ 中开集与 S 的交集为 S 的开集. 所以 $S=S\cap\mathbf{R}^n$ 是 S 的开集，空集 $\varnothing=S\cap\varnothing$ 为 S 的开集，用 U 表示 S 中的开集，下面图中 U、V 即为 S 的开集，虚线表示不属于该集合(图 21-1).

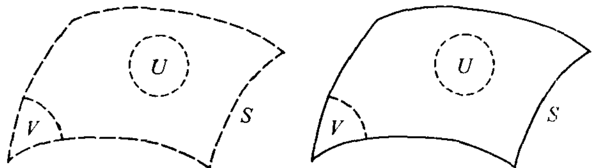


图 21-1

一连续映射 $f: X\subset\mathbf{R}^m\to Y\subset\mathbf{R}^n$，称为在 X 上光滑，即存在 $\mathbf{R}^m$ 中开集 U，使 $X\subset U$，和 $F: U\to Y$，$F|_X=f$，且 F 为光滑映射，即 F 在 U 上有连续一阶偏导数.

$f: X\to Y$ 称为**微分同胚**，首先它是同胚映射，又 $f: X\to Y$

是光滑的，$f^{-1}: Y\to X$ 也是光滑的.

定义 21.8 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中子集，若存在局部坐标系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$，其中 U_α 为 S 的开集，且 $S=\bigcup_\alpha U_\alpha$，$\varphi_\alpha: U_\alpha\to\varphi_\alpha(U_\alpha)$（$\mathbf{R}^k$ 中开集，$k\leqslant n$）为微分同胚映射，则称 S 为 **k 维微分流形.**

定义 21.8 也可改述成如下形式. 设 S 为 $\mathbf{R}^n$ 中子集，若任给 $y\in S$，总存在 S 上的 y 点邻域 U，和微分同胚映射 $\varphi: U\to V$（V 为 $\mathbf{R}^k$ 中开集，$k\leqslant n$），则称 S 为 k 维微分流形.

k 维微分流形就是局部与 $\mathbf{R}^k$ 中开集微分同胚的集合 S，其图像是 $\mathbf{R}^n$ 中不带边界或无边界的 k 维光滑曲面. 定义中不要求集合 S 连通，所以 k 维微分流形可以是若干张甚至无穷多张不交的 k 维光滑曲面. 以下讨论的 S 都假定是连通的.

$\varphi: U\to V$ 称为 U 的局部坐标系，U 称为局部坐标邻域. 若 $\varphi=(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，称 $x_j(j=1, 2, \cdots, k)$ 为局部坐标函数. $\varphi^{-1}: V\to U$ 为局部参数表示.

我们来说明 k 维微分流形 S 在每点有 k 维切空间. 事实上，$\varphi^{-1}: V\to U$ 在 V 上连续可微. $\varphi: U\to V$ 是 $\mathbf{R}^n$ 开集上连续可微函数 Φ 的限制，即 $\Phi|_U=\varphi$，所以复合函数

$$\Phi\circ\varphi^{-1}=\varphi\circ\varphi^{-1}=id_V: V\to V$$

可微，且

$$D\Phi\cdot D\varphi^{-1}=I_{k\times k}\quad (k\text{ 阶恒等矩阵}),$$

由此可知 φ^{-1}的 Jacobi 矩阵 $D\varphi^{-1}$在 V 上每点的秩为 k，故 k 个切向量 $\dfrac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_j}$ $(j=1, 2, \cdots, k)$组成 U 中相应点的切空间的一组基. 标架

$$\left[\frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\varphi^{-1}}{\partial x_k}\right]$$

表示切空间的一个定向.

为了讨论 S 的定向，我们考虑 S 上两个局部坐标系$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$(U_\beta, \varphi_\beta)$，满足 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$，并设

$$\varphi_\alpha=(x_1, x_2, \cdots, x_k), \quad \varphi_\beta=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k).$$

则复合函数

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),\ x \mapsto \tilde{x}$$

连续可微(因 φ_β 是开集上连续可微函数 Φ_β 在 U_β 上的限制,且 $\Phi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$). 逆映射

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta),\ \tilde{x} \mapsto x$$

也连续可微(图 21-2). 所以行列式

$$\frac{\partial(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_k)} \neq 0,$$

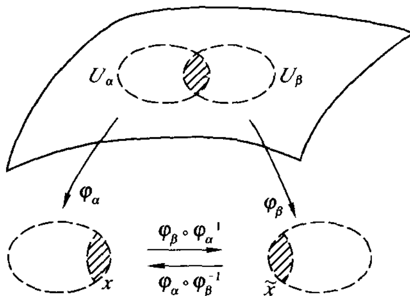


图 21-2

$(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \varphi_\beta)$ 和

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_k)}{\partial(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k)} \neq 0,$$

$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k) \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap \varphi_\beta)$.

定义 21.9 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 为 k 维微分流形($k \leqslant n$),若存在一组局部坐标系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $S = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. 对任意的 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$,令 $\varphi_\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $\varphi_\beta = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k)$,有

$$\frac{\partial(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_k)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_k)} > 0,$$

则称 S 是可定向的.

例 1 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为区域,则 D 为 n 维可定向微分流形.

事实上取 $U = D$, $\varphi = id_D$ 即知.

例 2 球面 S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 为一可定向二维微分流形.

事实上可取如下一组坐标系$\{(U_i, \varphi_i)\}(1\leqslant i\leqslant 6)$.

$$U_1=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, z>0\}.$$

$$\varphi_1: U_1\to\varphi_1(U_1)=\{(x, y)\mid x^2+y^2<1\}=D_1$$

$$\varphi_1(x, y, z)=(x, y), \varphi_1^{-1}(x, y)=\left(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}\right).$$

显然φ_1^{-1}在D_1上连续可微,φ_1为投影映射在U_1上的限制,而投影映射$(x, y, z)\to(x, y)$在$\mathbf{R}^3$上连续可微,所以$\varphi_1: U_1\to D_1$为微分同胚映射.

$$U_2=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, x>0\}.$$

$$\varphi_2: U_2\to D_2=\{(y, z)\mid y^2+z^2<1\},$$

$$\varphi_2(x, y, z)=(y, z), \varphi_2^{-1}(y, z)=\left(\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right);$$

$$U_3=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, y>0\},$$

$$\varphi_3: U_3\to D_3=\{(z, x)\mid z^2+x^2<1\},$$

$$\varphi_3(x, y, z)=(z, x), \varphi_3^{-1}(z, x)=\left(x, \sqrt{1-x^2-z^2}, z\right);$$

$$U_4=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, z<0\},$$

$$\varphi_4: U_4\to D_4=\{(y, x)\mid x^2+y^2<1\},$$

$$\varphi_4(x, y, z)=(y, x), \varphi_4^{-1}(y, x)=\left(x, y, -\sqrt{1-x^2-y^2}\right);$$

$$U_5=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, x<0\},$$

$$\varphi_5: U_5\to D_5=\{(z, y)\mid y^2+z^2<1\},$$

$$\varphi_5(x, y, z)=(z, y), \varphi_5^{-1}(z, y)=\left(-\sqrt{1-y^2-z^2}, y, z\right);$$

$$U_6=\{(x, y, z)\mid x^2+y^2+z^2=1, y<0\},$$

$$\varphi_6: U_6\to D_6=\{(x, z)\mid x^2+z^2<1\},$$

$$\varphi_6(x, y, z)=(x, z), \varphi_6^{-1}(x, z)=\left(x, -\sqrt{1-x^2-z^2}, z\right);$$

如$U_2\cap U_1\neq\varnothing$,$(y, z)=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(x, y)$为

$$\begin{cases} y=y, \\ z=\sqrt{1-x^2-y^2}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} y_x & y_y \\ z_x & z_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{x}{z} & -\dfrac{y}{z} \end{vmatrix}=\frac{x}{z}>0;$$

又如$U_4\cap U_6\neq\varnothing$,$(x, z)=\varphi_6\circ\varphi_4^{-1}(y, x)$为

$$\begin{cases} x = x, \\ z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_y & x_x \\ z_y & z_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{y}{z} & -\dfrac{x}{z} \end{vmatrix} = \frac{y}{z} > 0.$$

容易验证,对任意两上 $U_i \cap U_j \neq 0$,则 $\varphi_j \quad \varphi_i^{-1}$ 的 Jacobi 行列式大于零,所以 S 为可定向二维微分流形,在上半球面一点取定切平面定向为$\left[\dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y}\right]$,也就取定球面 S 的定向. 根据右手定则,取外法线方向 $\boldsymbol{n}$,这时$\left[\dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y}, \boldsymbol{n}\right]$成右手系标架,故我们也可说取定的 S 定向为外法线方向.

例 3 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为区域,$f: D \to \mathbf{R}^m (m < n)$,$f \in C^{(1)}(D)$. 设 $a \in D$ 为正则点(即 f 的 Jacobi 矩阵在 a 点的秩为 m),且 $f(a)$为正则值(即 $f(a)$不是临界点的值),则集合

$$S = \{x \in D \mid f(x) = f(a)\}$$

为 $n-m=k$ 维微分流形,且可定向.

先说明 S 局部可与 $\mathbf{R}^k$ 中开集微分同胚. 任取 $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in S$. 由 f 在 x_0 点 Jacobi 矩阵的秩为 m,无妨设

$$\left.\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}\right|_{x_0} \neq 0.$$

由隐函数存在定理,存在$(x_1^0, \cdots, x_m^0)$的邻域 W 和$(x_{m+1}^0, \cdots, x_n^0)$的邻域 $V(W \times V \subset D)$,方程组

$$\begin{cases} f_1(a) = f_1(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ f_n(a) = f_m(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_n), \end{cases}$$

有连续可微解

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ x_m = x_m(x_{m+1}, \cdots, x_n), \end{cases} : V \to W$$

令

$$\varphi:\begin{cases}x_1 = x_1(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ \cdots\cdots \\ x_m = x_m(x_{m+1}, \cdots, x_n), \\ x_{m+1} = x_{m+1} \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n.\end{cases} \quad V \to \mathbf{R}^n$$

和$U=\varphi(V)$,则U为S上开集,φ: $V\to U$连续可微,φ^{-1}: $U\to V$可以看成投影映射P: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{n-m}$在$U$上的限制,所以$\varphi^{-1}$为光滑映射,故$S$为$k$维微分流形.

其次说明S可定向.记

$$\boldsymbol{N}_j = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_1}, \frac{\partial f_j}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\right) \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

为S的法向量.因S为正则点集合,所以每点的$(N_1, \cdots, N_m)$组成m维法空间,如上讨论知对任意点$x_0\in S$,存在x_0点邻域U和微分同胚映射

$$\varphi^{-1}: U \to V \subset \mathbf{R}^k,\ \varphi: V \to U.$$

对$\mathbf{R}^k$中k个变量$x_{m+1}, \cdots, x_n$进行重排,并记作$u_1, u_2, \cdots, u_k$(若$k=1$时,作变换$x_n=u_1$或$x_n=-u_1$),使标架

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial u_k}, \boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_m\right]$$

与$\mathbf{R}^n$的标架$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$表示相同定向,对任意两局部坐标系$(U, \varphi^{-1})(\widetilde{U}, \tilde{\varphi}^{-1})$, $U\cap\widetilde{U}\neq\varnothing$时,设

$$\tilde{\varphi}: \widetilde{V} \to \widetilde{U},\ \tilde{\varphi}^{-1}: \widetilde{U} \to \widetilde{V},\ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_k).$$

且标架

$$\left[\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}_1}, \cdots, \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}_k}, \boldsymbol{N}_1, \cdots, \boldsymbol{N}_m\right]$$

与标架$[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$表示相同定向.所以

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \\ N_1 \\ \cdots \\ N_m \end{bmatrix} = \underset{n\times n}{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{u}_k} \\ N_1 \\ \cdots \\ N_m \end{bmatrix}$$

中行列式 $\det\boldsymbol{A}>0$,由 $\varphi=\tilde{\varphi}\circ(\tilde{\varphi}^{-1}\circ\varphi)$得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial u_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial u_k} & \cdots & \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial u_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

因此有

$$\frac{\partial(\tilde{u}_1, \cdots, \tilde{u}_k)}{\partial(u_1, \cdots, u_k)} = \det\boldsymbol{A} > 0.$$

这表明 S 可定向.

§5 微分形式在微分流形上的积分

设 S 是 k 维可定向的微分流形, D 为 S 上的紧集(即 D 的任一开覆盖必有有限子覆盖),如果 S 本身是紧的, D 可以取作 S.

定理 21.2 设 S 为 k 维可定向微分流形, $D\subset S$ 为紧集,则在 S 上存在局部坐标系 $\{(\boldsymbol{U}_i, \varphi_i)\}(i=1, 2, \cdots, n)$使

$$D\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i,$$

和单位分解,即存在 n 个函数 $g_i(x)\geqslant 0(\forall x\in S)$,满足:

(1) $g_i\circ\varphi_i^{-1}$ 在 $\varphi_i(U_i)$ 上连续可微$(i=1,2,\cdots,n)$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(x)\equiv 1,\ x\in D$;

(3) $\mathrm{supp}g_i=\overline{\{x\in S\mid g_i(x)\neq 0\}}\subset U_i(i=1,2,\cdots,n)$.

称集合 $\mathrm{supp}g_i$ 为 g_i 的**支集**.

证明 由 S 定义,对每点 $x\in S$,有一邻域 U_x,它与 $\mathbf{R}^k$ 中开集 V 微分同胚. 对 V 经平移、伸缩变换后,总可取单位球 V_1: $u_1^2+\cdots+u_k^2<1$ 包含在 V 内,(事实上是对局部坐标系的 φ 加以改造)即有微分同胚映射

$$\varphi_x: U_x\to V_1\subset\overline{V}_1\subset V.$$

记 $V_{\frac{1}{2}}$ 为半径 $\frac{1}{2}$ 的球: $u_1^2+\cdots+u_k^2<\left(\frac{1}{2}\right)^2$,和 $\widetilde{U}_x=\varphi_x^{-1}(V_{\frac{1}{2}})$,则开集合 $\{\widetilde{U}_x\mid\forall x\in S\}$ 构成 D 的一个开覆盖. 由于 D 是紧的,存在有限个 $\{\widetilde{U}_1,\cdots,\widetilde{U}_n\}$ 覆盖 D,特别 $\{U_1,\cdots,U_n\}$ 更覆盖 D.

为构造 $g_i(x)$,考虑 $\mathbf{R}^k$ 上可微函数

$$f(u)=\begin{cases}1, & |u|\leqslant\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{16}{9}(1-|u|^2)^2, & \dfrac{1}{2}<|u|<1,\\ 0, & |u|\geqslant 1.\end{cases}$$

令

$$\psi_i(x)=\begin{cases}f\circ\varphi_i(x), & x\in U_i,\\ 0, & x\overline{\in}U_i,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则 $\psi_i(x)$: $S\to\mathbf{R}^1$ 为光滑函数,且

$$\psi_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\widetilde{U}_i,\\ 0, & \overline{x}\in U_i,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

定义 $g_1=\psi_1$,一般地令 $g_{i+1}=(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i)\psi_{i+1}(i=1,2,\cdots,n-1)$. 则 g_i 满足 $0\leqslant g_i\leqslant 1$, g_i 的支持集属于 U_i. 证 $x\in D$

时，$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$，只要注意 $g_1 = 1-(1-\psi_1)$，设

$$g_1 + \cdots + g_i = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i)$$

成立，由此推出

$$\begin{aligned} g_1 + \cdots + g_i + g_{i+1} &= 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i) + (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i)\psi_{i+1} \\ &= 1-(1-\psi_1)\cdots(1-\psi_i)(1-\psi_{i+1}), \end{aligned}$$

所以 $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1-\psi_i(x)]$，当 $x \in D$，设 $x \in \widetilde{U}_i$，这时 $\psi_i(x) = 1$，故有 $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = 1$. 证毕.

定义 21.10 设 $S \subset \mathbf{R}^n$ 为 $k(\leqslant n)$ 维定向微分流形，(U, φ) 为保向局部坐标系(即 φ^{-1} 把 $\mathbf{R}^k$ 的正定向映为 S 取定的方向). 若 $\omega \in C_k^{(0)}(U)$，且 ω 在 U 内有紧支集(保证重积分存在)，定义

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega.$$

定义不依赖于坐标系的选取，设 (U, ψ) 为另一保向局部坐标系，则

$$F = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to \varphi(U),$$

是保区域正定向变换，由重积分换元公式得

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega &= \int_{\psi(U)} F^* (\varphi^{-1})^* \omega = \int_{\psi(U)} (\varphi^{-1} \circ F)^* \omega \\ &= \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^* \omega. \end{aligned}$$

定义 21.11 设 S 为 k 维定向微分流形，D 为 S 上紧域，$\{(U_i, \varphi_i)\}$ 为保向且覆盖 D 的局部坐标系，$\{g_i\}_{i=1}^{n}$ 为关于 $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ 的单位分解，$\omega \in C_k^{(0)}(D)$，定义

$$\int_D \omega := \sum_{i=1}^{n} \int_D g_i \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{D \cap U_i} g_i \omega.$$

定义与局部坐标系的选取和单位分解的选取无关. 事实上，设另有一保定向且覆盖 D 的局部坐标系 $\{(V_j, \psi_j)\}$ 和从属于

$\{V_j\}_{j=1}^m$的单位分解$\{h_j\}_{j=1}^m$,则

$$\sum_{i=1}^n \int_{D\cap U_i} g_i\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{D\cap U_i} h_j g_i \omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{D\cap U_i\cap V_j} h_j g_i \omega$$

$$= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{D\cap U_i\cap V_j} g_i h_j \omega = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{D\cap V_j} g_i h_j \omega$$

$$= \sum_{j=1}^m \int_{D\cap V_j} h_j \omega.$$

§6 Stokes 公式

设S是k维定向微分流形,D为S上区域,$\overline{D}\subset S$,所谓∂D是光滑边界,即$\forall x_0\in\partial D$,存在x_0点局部坐标系(U,φ),和函数

$$r: U\to\mathbf{R}$$

满足:(1) $U\cap D=\{x\in U\,|\,r(x)<0\}$;

(2) 函数$r\circ\varphi^{-1}$: $\varphi(U)=V\to\mathbf{R}$

连续可微,且$\mathrm{d}(r\circ\varphi^{-1})\neq 0(u\in V)$.(图 21-3)

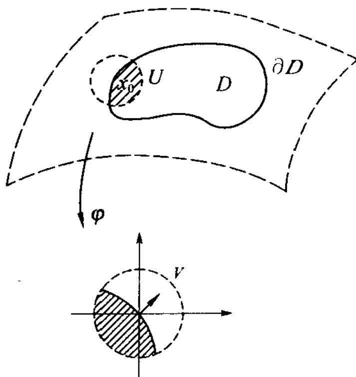


图 21-3

先说明∂D为$k-1$维微分流形.$\forall x_0\in\partial D$,存在局部坐标

系(U,φ),无妨设φ把x_0映为$\mathbf{R}^k$中原点(否则作一平移变换). φ: $U\to\varphi(U)=V$为微分同胚映射,由$\mathrm{d}(r\circ\varphi^{-1})\neq0$,特别在原点不为零,不妨设

$$\frac{\partial(r\circ\varphi^{-1})}{\partial u_1}>0,$$

$\left(若\frac{\partial(r\circ\varphi^{-1})}{\partial u_j}>0,作\ \tilde{u}_1=\tilde{u}_j,\ \tilde{u}_2,\ \cdots,\ \tilde{u}_k\ 是\ u_1,\ \cdots,\ u_{j-1},\ u_{j+1},\ \cdots,\ u_k\ 的重排变换即成\right)$则变换

$$\begin{cases}t_1=r\circ\varphi^{-1}(u_1,\cdots,u_k),\\ t_2=u_2,\\ \vdots\\ t_k=u_k,\end{cases}\qquad 或\ t=t(u)$$

在原点的雅可比行列式大于零.由逆变换存在定理,存在原点邻域V(无妨设与上述V一致)和W,使

$$t=t(u):V\to W$$

为微分同胚映射(图 21-4).则

$$t\circ\varphi=(r,\varphi'):U\to W$$

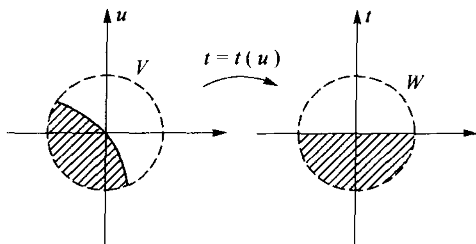


图 21-4

为微分同胚映射,其中φ': $U\to\mathbf{R}^{k-1}$为φ后$k-1$个坐标函数组成的映射.令

$$\tilde{\varphi}=\varphi'|_{\partial D\cap U}:\partial D\cap U\to\mathbf{R}^{k-1}\cap W$$

也是微分同胚映射.这说明∂D上任一点,存在领域$\partial D\cap U$,通过

映射 φ 建立 $\partial D\cap U$ 与开集 $\mathbf{R}^{k-1}\cap W$ 微分同胚,所以 ∂D 是一 $k-1$ 维微分流形.

其次说明 ∂D 可定向,设 $\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$ 为 S 的一组保向的局部坐标系,由以上讨论可得一组覆盖 ∂D 的保向局部坐标系 $\{(U_\alpha,\ t_\alpha\circ\varphi_\alpha)\}$,若 $(U_\alpha\cap\partial D)\cap(U_\beta\cap\partial D)\neq\varnothing$,记 $t_\beta\circ\varphi_\beta=(\bar{t}_1,\ \cdots,\ \bar{t}_k)$, $t_\alpha\circ\varphi_\alpha=(t_1,\ \cdots,\ t_k)$,则映射

$$\bar{t}=(t_\beta\circ\varphi_\beta)\circ(t_\alpha\circ\varphi_\alpha)^{-1}(t):W\to\widetilde{W}$$

把 $t_1=0$ 的点映为 $\bar{t}_1=0$ 的点,把 $t_1<0$ 的点映为 $\bar{t}_1<0$ 的点,所以 $\dfrac{\partial\bar{t}_1}{\partial t_1}>0$,再由 S 可定向,得

$$\left.\frac{\partial(\bar{t}_1,\cdots,\bar{t}_k)}{\partial(t_1,\cdots,t_k)}\right|_{(0,t_2,\cdots,t_k)}=\left|\begin{matrix}\dfrac{\partial\bar{t}_1}{\partial t_1} & 0 & \cdots & 0\\ * & \dfrac{\partial\bar{t}_2}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial\bar{t}_2}{\partial t_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ * & \dfrac{\partial\bar{t}_k}{\partial t_2} & \cdots & \dfrac{\partial\bar{t}_k}{\partial t_k}\end{matrix}\right|_{(0,t_2,\cdots,t_k)}>0$$

由此推出

$$\frac{\partial(\bar{t}_2,\ \cdots,\ \bar{t}_k)}{\partial(t_2,\ \cdots,\ t_k)}>0.$$

故 ∂D 可定向,映射 $t_\alpha\circ\varphi_\alpha$ 把 $[t_1,\ t_2\cdots,\ t_k]$ 正定向映为 S 的定向,把 $[t_2,\ \cdots,\ t_k]$ 映为 ∂D 的定向称为由 S 决定的 ∂D 的诱导定向.

定理 21.3(Stokes) 设 S 为 k 维定向微分流形,D 为 S 上区域,$\overline{D}\subset S$ 为紧集,∂D 为光滑边界,$\omega\in C_{k-1}^{(1)}(\overline{D})$,则

$$\int_{\partial D}\omega=\int_D \mathrm{d}\omega.$$

证明 作 $\overline{D}$ 的开覆盖时,对每一 ∂D 的点,如上讨论有保向局部坐标系 $(U,\ \varphi)$,$\varphi=(r,\ \varphi')$,φ':$U\to\mathbf{R}^{k-1}$ 为 φ 的 $k-1$ 个坐标函数组成. 对 D 内的点,作保向局部坐标系时,使 U 与 ∂D 不交,这样,由 D 的紧性,存在有限个保向局部坐标系 $\{(U_i,\ \varphi_i)\}_{i=1}^n$,

$\overline{D}\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$. 若 $U_i\cap\partial D\neq\varnothing$, $\varphi_i=(r_i,\varphi_i')$, $\varphi_i':U_i\to\mathbf{R}^{k-1}$. 无妨设

$$D\cap U_i=\{x\in U_i\mid -1<r_i(x)<0\}.$$

设从属于 $\{U_i\}_{i=1}^{n}$ 的单位分解为 $\{g_i\}_{i=1}^{n}$. 要证

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{D}\mathrm{d}\omega,$$

只要证

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial D}g_i\omega=\sum_{i=1}^{n}\int_{D}\mathrm{d}(g_i\omega)$$

或

$$\int_{\partial D\cap U_i}g_i\omega=\int_{D\cap U_i}\mathrm{d}(g_i\omega)\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

情形一 若 $U_i\cap\partial D\neq\varnothing$,略去脚标 i, $\varphi=(r,\varphi'):U\to V_1$, $\tilde{\varphi}=\varphi'|_{\partial D\cap U}:\partial D\cap U\to\mathbf{R}^{k-1}$. 因 (U,φ) 是 S 的保向局部坐标系, $(U\cap\partial D,\tilde{\varphi})$ 是 ∂D 的保向局部坐标系,所以

$$\int_{\partial D\cap U}g\omega=\int_{\tilde{\varphi}(\partial D\cap U)}(\tilde{\varphi}^{-1})^*(g\omega),$$

$$\int_{D\cap U}\mathrm{d}(g\omega)=\int_{\varphi(D\cap U)}(\varphi^{-1})^*\mathrm{d}(g\omega).$$

为了比较上两式右端积分,用坐标表示设为:

$$(\varphi^{-1})^*(g\omega)=\sum_{j=1}^{k}a_j(u)\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathrm{d}u_j}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_k.$$

其中记号 $\widehat{\mathrm{d}u_j}$ 表示略去 $\mathrm{d}u_j$ 这一因子, $a_j\in C^{(1)}(\varphi(U\cap\overline{D}))$. 则

$$(\tilde{\varphi}^{-1})^*(g\omega)=a_1(0,u_2,\cdots,u_k)\mathrm{d}u_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_k.$$

由拉回性质得

$$\begin{aligned}(\varphi^{-1})^*\mathrm{d}(g\omega)&=\mathrm{d}[(\varphi^{-1})^*(g\omega)]\\&=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\frac{\partial a_j}{\partial u_j}\mathrm{d}u_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}u_k.\end{aligned}$$

 所以

$$\int_{D\cap U} d(g\omega) = \int_{\varphi(D\cap U)} (\varphi^{-1})^* d(g\omega)$$

$$= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \int_{\{u\in \mathbf{R}^k:\ -1<u_1<0\}} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \cdots du_k.$$

注意化累次积分时,有

$$\int_{-1}^{0} \frac{\partial a_1}{\partial u_1} du_1 = a_1(0,\ u_2,\ \cdots,\ u_k) - a_1(-1,\ u_2,\ \cdots,\ u_k)$$

$$= a_1(0,\ u_2,\ \cdots,\ u_k),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_j = 0 \quad (j \geqslant 2).$$

故有

$$\int_{D\cap U} d(g\omega) = \int_{\mathbf{R}^{k-1}} a_1(0,\ u_2,\ \cdots,\ u_k) du_2 \cdots du_k$$

$$= \int_{\mathbf{R}^{k-1}} a_1(0,\ u_2,\ \cdots,\ u_k) du_2 \wedge \cdots \wedge du_k$$

$$= \int_{\tilde{\varphi}(\partial D\cap U)} (\tilde{\varphi}^{-1})^* (g\omega) = \int_{\partial D\cap U} g\omega.$$

情形二 $U_i \cap \partial D = \varnothing$,这时

$$\int_{D\cap U} d(g\omega) = \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbf{R}^k} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j}{\partial u_j} du_1 \cdots du_k = 0,$$

$$\int_{\partial D\cap U} (g\omega) = \int_{\varnothing} g\omega = 0.$$

故仍有

$$\int_{D\cap U} d(g\omega) = \int_{\partial D\cap U} g\omega. \quad 证毕.$$

推论 21.1 若 S 是一紧 k 维微分流形,$\omega \in C_{k-1}^{(1)}(S)$,则

$$\int_S d\omega = 0.$$

事实上,取 $D=S$, $\partial D=\varnothing$,由 Stokes 公式即知.

注　　记

我们建立微分形式与场论间的对应,下表中左边表示微分形式,右边表示对应的场.

$u\in C_0^{(r)}(\Omega)$	数量场 u
$\lambda=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\in C_1^{(r)}(\Omega)$	向量场 $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$
$\omega=P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\in C_2^{(r)}(\Omega)$	向量场 $\boldsymbol{G}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$
$\mathrm{d}u$	∇u
$\mathrm{d}\lambda$	$\nabla\times\boldsymbol{F}$
$\mathrm{d}\omega$	$\nabla\cdot\boldsymbol{G}$
$\mathrm{d}^2u=0$	$\nabla\times(\nabla u)=0$
$\mathrm{d}^2\lambda=0$	$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{F})=0$
$\lambda_1\wedge\lambda_2$	$\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2$
$\lambda\wedge\omega$	$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}$
$\mathrm{d}(u\omega)=\mathrm{d}u\wedge\omega+u\wedge\mathrm{d}\omega$	$\nabla\cdot(u\boldsymbol{G})=\nabla u\cdot\boldsymbol{G}+u(\nabla\cdot\boldsymbol{G})$
$\mathrm{d}(u\lambda)=\mathrm{d}u\wedge\lambda+u\wedge\mathrm{d}\lambda$	$\nabla\times(u\boldsymbol{F})=\nabla u\times\boldsymbol{F}+u(\nabla\times\boldsymbol{F})$
$\mathrm{d}(\lambda_1\wedge\lambda_2)=\mathrm{d}\lambda_1\wedge\lambda_2-\lambda_1\wedge\mathrm{d}\lambda_2$	$\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1\times\boldsymbol{F}_2)=(\nabla\times\boldsymbol{F}_1)\cdot\boldsymbol{F}_2-(\nabla\times\boldsymbol{F}_2)\cdot\boldsymbol{F}_1$

(若 Ω 是凸区域)

$\mathrm{d}\lambda=0\Leftrightarrow\lambda=\mathrm{d}u$	$\nabla\times\boldsymbol{F}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{F}=\nabla u$
$\mathrm{d}\omega=0\Leftrightarrow\omega=\mathrm{d}\lambda$	$\nabla\cdot\boldsymbol{G}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{G}=\nabla\times\boldsymbol{F}$

我们引入线性算符 $*$: $C_k^{(r)}(\Omega)\to C_{n-k}^{(r)}(\Omega)$. 对三维空间来说

$$^*1=\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,\quad ^*\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=1,$$
$$^*\lambda=\omega,\qquad ^*\omega=\lambda.$$

(若 $\varphi\in C_k^{(r)}(\Omega)$, $^{**}\varphi=(-1)^{(n-k)k}\varphi$). 再引入形式微分 $\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}z$, $^*\mathrm{d}=\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 所以 $\mathrm{d}\wedge{}^*\mathrm{d}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, $^*(\mathrm{d}\wedge{}^*\mathrm{d})=\Delta$.

$^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}u={}^*(\mathrm{d}\wedge{}^*\mathrm{d})u$	$\nabla\cdot(\nabla u)=\Delta u$
$^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}\lambda=\mathrm{d}^*\mathrm{d}^*\lambda-{}^*(\mathrm{d}\wedge{}^*\mathrm{d})\lambda$	$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{F})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F})-\Delta\boldsymbol{F}$

$$
{}^*d^*(\lambda_1 \wedge \lambda_2) = {}^*d^*\lambda_2 \wedge \lambda_1 - {}^*d^*\lambda_1 \wedge \lambda_2 - {}^*(\lambda_1 \wedge {}^*d) \wedge \lambda_2 + {}^*(\lambda_2 \wedge {}^*d) \wedge \lambda_1
$$

$$
\nabla \times (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{F}_1 - (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{F}_2 - (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_1
$$

[General Information]
书名=数学分析　第三册
作者=方企勤
页数=385
SS号=11113991
DX号=
出版日期=2002年
出版社=上海科学技术出版社